

جمهورية تنزانيا
وزارة التربية الوطنية
التعليم العربي الاسلامي

مذكرة الرياضيات للسنة الثالثة الثانوية

لجنة السهر
على التعليم العربي الاسلامي

ترجمہ اول: الأمانة العامة للأمم المتحدة
مواضع السنة الثانية لمراجعتها في بداية السنة
الثالثة، وخاصة فيما يتعلق في حل المعادلات والمتباينات
والحدودية وأنظمة خاصة
ليتمكن الطالب من دراستها وحلها
في مادة الرياضيات الثانية والثالثة
وأخذها من غيرها في الحياة اليومية

(2)

مجموع المتوالية الهندسية

بدلالة الحد الأول والأساس وعدد حدودها

بفرضنا مجموع n عدد حدودها

$$\textcircled{1} \quad 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = \frac{(1-r^n)P}{1-r} \quad \text{وهذا}$$

في حالة $r < 1$

$$\textcircled{2} \quad \frac{(r^n - 1)P}{(r - 1)} = S \quad \text{وهذا في حالة } r > 1$$

مثال: اوجد مجموع خمسة حدود من المتواليةالهندسية $2, 6, 18, \dots$

الحل

$$r = \frac{6}{2} = 3 = r > 1$$

$$\therefore \frac{(1-243)2}{2} = \frac{(1-3^5)2}{1-3} = \frac{(1-r^5)P}{1-r}$$

242

6

مثال

③

مثال: أوجد مجموع السلسلة "حدود الأولى"
هي المتوالية الهندسية "625، 125، 25، ..."

$$1 > \sqrt[6]{\frac{1}{5}} = \frac{125}{625} = \sqrt[6]{\frac{1}{5}} \quad , \quad 625 = P$$

$$\frac{\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{6}} - 1\right) 625}{\frac{1}{5} - 1} = \frac{(\sqrt[6]{\frac{1}{5}} - 1) P}{(\sqrt[6]{\frac{1}{5}} - 1)} = \Delta$$

$$= \frac{5}{4} \times \frac{15625}{15625} \times 625 = \left(\frac{1}{15625} - 1\right) 625$$

$$7.81 \frac{1}{5} = \frac{3906}{5}$$

مثال كم حد من الحدود (متوالية 15) - $1\frac{2}{3}$ يمكن انخذها ابتداء من الحد الاول ليكون مجموعها

$$11 \frac{62}{243}$$

$$1 > \frac{1}{3} = \frac{5}{15} = \sqrt[3]{\frac{5}{15}} \quad , \quad 15 = P$$

$$\frac{(\sqrt[3]{\frac{5}{15}} - 1) 15}{(\sqrt[3]{\frac{5}{15}} - 1)} = \frac{(\sqrt[3]{\frac{5}{15}} - 1) P}{\sqrt[3]{\frac{5}{15}} - 1} = \Delta$$

7

(4)

$$\frac{\binom{2}{\left(\frac{1}{3}-\right)-1}15}{\left(\frac{1}{3}-\right)-1} = \frac{116}{243} = \frac{\binom{2}{\left(\frac{1}{3}-\right)-1}15}{\left(\frac{1}{3}-\right)-1}$$

$$\left[\binom{2}{\left(\frac{1}{3}-\right)-1}\right] \frac{3}{4} \times 15 = \frac{\left[\binom{2}{\left(\frac{1}{3}-\right)-1}\right]15}{\frac{1}{3}+1} = \frac{2735}{243}$$

$$\frac{2188}{2187} = \frac{4}{3 \times 15} \times \frac{2735}{243} = \left(\frac{1}{3}-\right)-1 \therefore$$

$$\binom{7}{\left(\frac{1}{3}-\right)} = \frac{1}{2187} = \frac{2288}{2187} - 1 = \left(\frac{1}{3}-\right) \therefore$$

$$7 = 0 \therefore$$

عدد الحدود التي يمكن أخذها 7

مثال: اوجد مجموع الثمانية حدود

الاولى من المتواليات الهندسية التي

حدها الثاني $1\frac{1}{2}$ ، وحدها السادس 24

الحل:
نفرض ان المتواليات هي $a, ar, ar^2, ar^3, \dots$

$$24 = 7 \quad 1\frac{1}{2} = 2$$

(8)

$$1\frac{1}{2} = \left(\frac{7}{2}\right)$$

⑤

$$① \leftarrow \sqrt{P} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow 1 \frac{1}{2} = \sqrt{2}$$

$$② \leftarrow \sqrt[5]{P} = 24 \Rightarrow 24 = \sqrt[6]{\quad}$$

$$16 = \frac{48}{3} = \frac{24}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt[5]{P}}{\sqrt{P}} \Rightarrow \text{بقسمة ② على ①}$$

$$(2 \pm) = \sqrt{r} \quad (= 16 = \sqrt[4]{r})$$

بالتعويض في (1) نصل على

$$\frac{3}{4} \pm = \frac{3}{2} = (2 \pm) \times P$$

$$\frac{765}{4} = 255 \times \frac{3}{4} = \frac{(1 - \frac{1}{2}) \frac{3}{4}}{1 - 2} \quad \Delta$$

$$\frac{(256 - 1)}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{[(2 - 1) - 1] \frac{3}{4}}{(2 - 1) - 1} = 8 \Delta$$

$$\frac{225}{4} =$$

الاجاد مجموع المتواليات الهندسية بدلالة الحد الأخير

والدس من
١. اثار من بالحد النوني في المتواليات الهندسية

٢. اثار من بالحد النوني في المتواليات الهندسية

$$1 - \sqrt[2]{P} = L$$

⑥

بضرب الطرفين في r نحصل على

$$rP = P \cdot r^{1-0}$$

$$rP = P \cdot r^0 \text{ بالتعويض}$$

$$\frac{(P - 1)r}{r - 1} \text{ أو } \frac{(1 - r)P}{1 - r} = P$$

$$\frac{rP - P}{r - 1} \text{ أو } \frac{(P - rP)}{1 - r} = P$$

$$\frac{rP - P}{r - 1} = \frac{P - rP}{1 - r} = P$$

مثال: متواليات هندسية حدها الأول 480 وحدها

الأخير 30 واساسها $\frac{1}{2}$ ما مجموعها؟ وكم

عدد حدودها؟ الحل.

$$480 = P, 30 = L, \frac{1}{2} = r$$

$$\frac{15 - 480}{\frac{1}{2}} = \frac{(480 \times \frac{1}{3}) - 480}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{rP - P}{r - 1} = P$$

$$930 = \frac{465}{\frac{1}{2}}$$

ص 10
سفرها 10

(7)

1-2

نفره اول = ح $\therefore 480 = 30 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$

$\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} = \frac{30}{480} = \left(\frac{1}{2}\right)$

$5 = 0 \quad \leftarrow 4 = 1 + 0 \therefore$

عدد الحدود = 5 والله التوفيق

مثال: ص. هـ: فيها $1 = \frac{1}{3} \therefore 3 = 3$ وحدها

الاخير = 243 او 3 عدد حدودها

ح = 1 $\therefore \left(\frac{1}{3}\right) = 243 = \left(\frac{1}{3}\right) = 1$ ^{الكل}

$243 = \frac{1}{3} + (3) \times \frac{1}{3} = (3) \times \frac{1}{3}$

$(3) = (3) \times 3 \times 3 = (3) = 243 = (3) \frac{1}{9}$

$\boxed{7 = 0 \leftarrow}$

مثال: ص. هـ: او 3 الحدود في كل من افعالها الهندسية

$[4] = 2$ $\leftarrow$ $1 = 1$ $\leftarrow$ $2 = 2$ $\leftarrow$ $4 = 4$

$\left[\frac{1}{4}\right] = \frac{1}{2}$ $\leftarrow$ $1 = 1$ $\leftarrow$ $2 = 2$ $\leftarrow$ $4 = 4$

$\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4}$ $\leftarrow$ $1 = 1$ $\leftarrow$ $2 = 2$ $\leftarrow$ $4 = 4$

$[12] = 8$ $\leftarrow$ $1 = 1$ $\leftarrow$ $2 = 2$ $\leftarrow$ $4 = 4$

11

(8)

الأوساط العددية

تعريف إذا كانت الكميات A, B, C

متوالات حسابية (متتابعات حسابية)

تسمى الحد الأوسط « B » بالوسط العددي

أو الوسط الحسابي للكميتين A, C

وإذا كانت الكميات $A, B, C, \dots, D, E, \dots, L$

متوالات عددية فإن الحدود $B, C, D, \dots, E, \dots, L$

تسمى الأوساط العددية بين A, L

«إيجاد الوسط العددي بين كميتين»

بقضبان الكفيتين هما A, C وبفرض

أن الوسط العددي بينهما هو S

$\therefore A, S, C$ تكون متوالية عددية

$$\therefore S - A = C - S \Rightarrow S = \frac{A + C}{2}$$

أخا عدة اوساط

12

⑨

لا بد خال عدداً أو وسطاً عددية

بين مقدارين معلومين

يمكن ادخال اي عدد من الاوساط العددية بين
مقدارين معلومين.

مثال: اَدْخُلْ اربعة اوساط بين 2 و 22

الحل
∵ عدد الاوساط 4 ∴ عدد الحدود = 2 + 4 = 6
∴ $\frac{22}{6} = \text{ح}$ ، $\frac{2}{1} = \text{ح}$

∴ $22 = 55 + 2$ ∴ $20 = 55$ ∴ $\frac{20}{5} = 4$
∴ الاوساط = 4 ، 6 ، 10 ، 14 ، 18

مثال: عددان الفرق بينهما 6 ووسطهما العدد
6 فما هما العددان

الحل
نفرض ان العددين هما P و B حيث $P < B$

$$6 = \frac{C+P}{2} \quad 2 = C - P$$

$$12 = C + P \quad 13 = C - P$$

$$\begin{array}{r} C - P \\ C + P \end{array}$$

(10)

$$\begin{cases} 2 = C - P \\ 12 = C + P \end{cases}$$

$$7 = \frac{14}{2} = P \Rightarrow 14 = P2$$

$$5 = 7 - 12 = C \quad \boxed{7 = P}$$

$$\boxed{5 = C} \quad \text{العددا هما } \{5, 7\}$$

مثال: اذا ادخلت عدد "اوسط عددية"

بين - 5 و 19 وكانت النسبة بين مجموع

الوسطيين الاوليين الى مجموع الوسطيين

الخيريين كنسبة $\frac{1}{29}$ فما هي

هذه الاوساط

الحل:
نفرض ان الاوساط 5 و 19

$$(52 - 19) (53 + 5) - (52 + 5) (5 + 5)$$

نفسه $5 - 19$

$$= \frac{53 + 10}{53 - 38} = \frac{1}{29} = \frac{(52 + 5) + (5 + 5)}{(52 - 19) + (53 + 5)}$$

$$53 + 38 = 587 + 290 = \frac{1}{29}$$

$$3 = \frac{852}{84} = 5 = 252 = 584$$

الاوساط - 2 و 1 و 4 و 7 و 16

القاعدة
 $2 = 4 = (\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}) \times \text{عدد الحدود}$

$$\frac{2}{2} \times (1 + 1) = 2 = 2 \times (1 + 1) = 4 = 2$$

أيجاد مجموع حدود المتسلسلة

المرتبطة بالمتواليات الحسابية

12, 15, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52, 55

هذا الحد العام للمتوالية هو الأساس المتوالي

الكل

$$7 \times (1 - n) + 5 = \text{الحد العام}$$

$$2 - 27 = 29 = 7 - n \times 7 + 5 = 29$$

الحد العام = $2 - 27 = 29$ وهذا الحد 51

$$355 = 2 - 357 = 2 - (51 \times 7)$$

$$9180 = \frac{51 \times 360}{2} = \frac{51}{2} \times (355 + 5) = 9180$$

الرمز المثلثي للمجموعة متسلسلة

يسمى سيجما للدلالة على المجموع

$$\sum_{i=1}^9 (5 - 2i) \text{ معناه أعداد صحيحة } (5 - 2i) \text{ من } 1 \text{ إلى } 9$$

18

وعلى الامثلة السابقة يمكن ان نعتبر

المجموع كما يلي $\sum_{n=0}^{51} (5-3)^n$ انه المتغير

يمكن كتابته بالمتغير $1=3-5$ سابقا

مثال اوجد $\sum_{n=0}^5 (7-3)^n$

كم عدد حدود المطلوب اياها مجموعها انه 5

كم الحد الاول من هذه التسلسلة انه

$$4 = 7 - 3^1 \quad \text{الحد الثاني منها} \quad 2 = 7 - 3^2$$

$$\text{وهكذا} \quad \sum_{n=0}^5 (7-3)^n = 0 \quad \{5, 4, 3, 2, 1\}$$

$$(7-3^5) + (7-3^4) + (7-3^3) + (7-3^2) + (7-3^1)$$

$$328 = 236 + 74 + 20 + 2 + 4 -$$

مثال: اكتب الحدين الثالث والسادس

$$\text{للتسلسلة} \quad \sum_{n=0}^{10} (1-3 \times 4)^n$$

$$\text{الحد الثالث} = (1-3 \times 4) = 11 = 1 - 42$$

$$\text{الحد السادس} = (1-8 \times 4) = 31 = 1 - 32$$

اكتب

(13)

الكتب الحدود السبعة الأولى للمتباينة المرسومة

$$\sum_{r=1}^{\infty} (5 - 2^r)$$

في الحد الأول للميتالي

الحل

$$4 = (5 - 2^0) = (5 - 2^1)$$

$$3 = (5 - 2^2)$$

$$1 = (5 - 4) = (5 - 2^3)$$

$$3 = (5 - 8) = (5 - 2^4)$$

$$27 = 2^5$$

$$59 = 5 - 64 = (5 - 2^7)$$

استخدم رمز المجموعة للتعبير عن

$$13 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3$$

نستطيع ان نكتب رمز المجموعة والاعداد اخرى

$$1 + 9 = 10$$

27

(14)

$$= 2 \cdot (1 - v) + 3 = 8$$

$$1 + 0.2 = 8 \quad (= 2 - 0.2 + 3 = 8)$$

$$(1 + v)^6 \sum_{1=0}^6$$

مستطوع كتابية

ثم ريب الكتب الحدود الخمسة الاولى
لكل متسلسلة الآتية دون استخدام

منزلة جوهية

$$(1 - v^2) \sum_{1=v}^{\infty} (1 - v^2) \sum_{1=v}^{\infty} (1 - v^2)$$

$$1 + 1 - 0 \quad 10 \quad 1 - 0 \quad \left(\frac{3}{5}\right)^7 \sum_{1=0}^7 = (A)$$

ك

الكتب

المتسلسلة

(21)

15

الكتب المتصلة الآتية تذكر حدودها

→ استخدام من المجموعة

$$\sum_{i=0}^2$$

$$16 \times 8 \times 4 \times 1 = 2^4 (4) (3) (2) (1)$$

قد ریب

$$(10 + \sum_{1=1}^5 \frac{2}{(1+0)^2}) \sum_{1=0}^6 (1)$$

$$3(1-x)^7 \sum_{x=0}^{\infty} (x) \quad 2 + (3-x)^4 \sum_{x=0}^{\infty} (x)$$

$$\frac{6}{8} < \frac{4}{6} < \frac{2}{4} \quad (P)$$

35 ... 0.146 M (c)

216:27 p. 100 (S) 83-25-641-1-1. (D)

مثال: 16
سلسلة هارموني

وحسب التعريف السابق يكون

$$4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22$$

مثال: على المتسلسلة $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$ وهي متسلسلة منتهية

من سبعة حدود

$$1 + \left(\frac{1}{2} + n\right) + 1 + 4\frac{1}{5} + 3\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}$$

لها متسلسلة غير منتهية حد ها العام

$$\left(\frac{1}{1+n} + 1\right) =$$

$$\dots + \frac{1}{2(10)} + \frac{1}{10} + 1$$

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \dots$$

مثال:

و نستخدم تقنيات متسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

والا نهائية

أما

23

اما المتسلسلة المنتهية عدد حدودها n

فتكتب على الصورة $\sum_{q=0}^n$

مثال أكتب جميع حدود المتسلسلة

$$\sum_{q=0}^6$$

الحل : للحصول على حدود المتسلسلة علينا ان

نعوض القيم المتتالية $q=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ في المتغير q في الحد العام (q)

$$2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$$

$$64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 = 127$$

لتعريف مجموع المتسلسلة المنتهية هو مقدار الذي نحصل عليه عند جمع حدودها

جميعا. سنرمز لمجموع المتسلسلة بالرمز

S_n حيث n على الحدود المراد جمعها فحسب

$$S_4 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$$

(18)

وستستعمل الرمز $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k}$

مثال:

ما مجموع المتسلسلة

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} (-1)^k$$

(A) ما إذا كانت فردية (B) إذا كانت زوجية

الحل (1-) وعلى الحد الثاني يتبعه $k=0$

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^k$$

هكذا فإن (A) فردية (B) المجموع = 1

وإن كانت زوجية (B) المجموع صفر

الكتب المتسلسلتين التاليتين دون

استخدام الرمز $\sum$

$$\sum_{k=0}^6 \binom{n}{k} (-1)^k \quad \sum_{k=0}^6 \binom{n}{k} (-1)^k$$

(19)

مثال في متتالية حسابية $18 = \frac{7}{4} \cdot 16 = \frac{7}{4}$

او $\frac{7}{4} = \frac{18}{10}$

$$18 = 53 + p \quad \leftarrow \quad \frac{7}{4} = 53 + p = \frac{7}{4}$$

$$16 = 56 + p = 56 + p = \frac{7}{4}$$

وعلى هذا فان $\frac{2}{3} = 20 = p$

$$\left(\frac{2}{3}\right)9 + 20 = \frac{7}{10} \quad \boxed{20 = p = \frac{7}{10}}$$

$$\boxed{14 = \frac{7}{10}} = 2 - x3 + 20 = \frac{7}{10}$$

مثال ادخل 9 اعداد بين 3 و 43

بحيث تشكل جميع هذه الاعداد متتالية حسابية

(20)

الحل،

$$43 = \underset{11}{\overset{3}{\mathcal{H}}} \quad 3 = \underset{1}{\mathcal{H}}$$

$$510 + 3 = 43 \quad (= 510 + \underset{11}{\overset{3}{\mathcal{H}}} = \underset{11}{\mathcal{H}})$$

$$4 = \frac{40}{10} = 5 \quad (= 510 = 3 - 43)$$

$$4 = 5 \wedge 3 = \underset{1}{\mathcal{H}} \quad \therefore \boxed{4 = >}$$

$$10 = 3 + 7 = \underset{3}{\mathcal{H}} \quad \wedge \quad 7 = 3 + 4 = \underset{2}{\mathcal{H}}$$

وفيما يلي طريقة لإيجاد مجموع متسلسلة
حسابية عدد حدودها ∞

$$\text{إذا كان } \underset{0}{\mathcal{H}} + \underset{1}{\mathcal{H}} + \underset{2}{\mathcal{H}} + \dots + \underset{1}{\mathcal{H}} + \underset{0}{\mathcal{H}}$$

وكان أساس المتسلسلة هو s

$$\text{فإن } \underset{0}{\mathcal{H}} + (s - \underset{0}{\mathcal{H}}) + \dots + (s + \underset{1}{\mathcal{H}}) + \underset{1}{\mathcal{H}} = \underset{1}{\mathcal{H}}$$

$$\text{وكذلك } \underset{1}{\mathcal{H}} + (s + \underset{1}{\mathcal{H}}) + \dots + (s - \underset{0}{\mathcal{H}}) + \underset{0}{\mathcal{H}} = \underset{0}{\mathcal{H}}$$

و منه 27

(21)

$$+ (\overset{1}{\underset{3}{x}} + \overset{1}{\underset{1}{x}}) + (\overset{1}{\underset{5}{x}} + \overset{1}{\underset{3}{x}} + \overset{1}{\underset{1}{x}}) = 0 + 0 + 0$$

$(\overset{1}{\underset{3}{x}} + \overset{1}{\underset{1}{x}})$ وعلى هذا فإن

$$0 + 0 = 0 \quad (\overset{1}{\underset{5}{x}} + \overset{1}{\underset{3}{x}} + \overset{1}{\underset{1}{x}})$$

$$0 + 0 = \frac{0}{2} = 0 \quad [\overset{1}{\underset{5}{x}} + \overset{1}{\underset{3}{x}} + \overset{1}{\underset{1}{x}}]$$

نظرية مجموع من الحدود الأولى
المتسلسلة حسابية هو

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

$$= \frac{n}{2} [a_1(1-n) + a_n]$$

$$\text{مثال: اوجد مجموع المتسلسلة } \sum_{n=1}^{15} (5n - 14)$$

الحل

عدد حدود المتسلسلة يساوي 15 حدا

وبالتعويض $n=1$ ، $n=15$ نجد ان

$$90 = \frac{15}{2} (-1 + 65) = \frac{15}{2} (64) = 90$$

(28)

(22)

مثال: رتب قاعد مسرج في 25 صفا

بحيث تحتوي الصف الاول على 20

مقعدا والثاني 19 والثالث على 18

وهكذا فما هو عدد المقاعد في المسرج

الاول 20 واساسها 1 وعدد حدودها 25

$$\sum_{25}^{20} = \frac{25}{2} (20 + 1)$$

$$24 + 20 = 2 \Rightarrow 24 + 1 = 2$$

$$\sum_{25}^{44} = \frac{25}{2} (44 + 20) = \boxed{44 = 2}$$

$$800 = 2 \div (64 \times 25) = \sum_{25}$$

اي يوجد في المسرج 800 مقعدا

اول

20

(23)

او مجموع المتسلسلتين التاليتين

$$(6-2) \sum_{1=0}^{60} (0 < (17-2) \sum_{1=0}^{16} P$$

$$25 \dots + (11-) + (13-) + 17 = P$$

$$114 + \dots 2 + (0) + (2-) + 4- (0$$

الكسب حدود متسلسلة

$$(1+2\frac{1}{3}) \sum_{1=0}^5$$

$$+ (1+ (2) \frac{1}{3}) + (1+ (1) \frac{1}{3}) = (1+ 2\frac{1}{3}) \sum_{1=0}^5$$

$$= (1+ (5) \frac{1}{3}) + (1+ (4) \frac{1}{3}) + (1+ (3) \frac{1}{3})$$

$$2\frac{2}{3} + 2\frac{1}{3} + 2 + 1\frac{2}{3} + 1\frac{1}{3}$$

30

الكسب حدود التسلسلة

$$\sum_{n=0}^6 2^n \text{ أو } \sum_{n=0}^6 2^n$$

الكل
الكل العام = (2) بالجمع 1, 2, 3, 4, 5, 6

التسلسل

$$(2^0), (2^1), (2^2), (2^3), (2^4), (2^5), (2^6)$$

$$64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 127$$

$$\sum_{n=0}^6 2^n$$

$$2^7 - 1 = 127$$

32

31

(25)

كم حبات يمكن أخذها من حدود مكتوبات
 $15 - 5 = 10$ ابتدء من الحد الأول ليكون

مجموعها $11 \frac{62}{243}$

الكل

$$\frac{1}{3} = \frac{5}{15} = \text{حد أول} = 15$$

$$\frac{(v-1)^p}{(v-1)} = 1 \quad \therefore \quad 1 > v$$

$$\frac{(\frac{1}{3}-1)^{15}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{2735}{243} \quad \frac{(\frac{1}{3}-1)^{15}}{(\frac{1}{3}-1)} = 11 \frac{62}{243}$$

$$= (\frac{1}{3}-1) = \left[(\frac{1}{3}-1) \right] \frac{3}{4} \times 15$$

$$\frac{2188}{2187} = \frac{4}{3 \times 15} \times \frac{2735}{243}$$

$$\frac{1}{2187} = \frac{2188}{2187} - 1 = \left(\frac{1}{3} \right) \therefore$$

$$7 = 0 \quad \therefore \quad \left(\frac{1}{3} \right)^7 = \left(\frac{1}{3} \right) \therefore$$

$\therefore$ عدد الحدود التي يمكن أخذها 7 حدود

الباب الثاني

الباب الثاني

المتواليات الهندسية

إذا كان لدينا مجموعة الأعداد وكان كل حده مقسوماً

على سابقه بعظماء قدر ثابتاً فإن هذه الأعداد

تكون ما يسمى متواليات الهندسية. ومقدار

الثابت هو أساسها مثال على ذلك $\{3, 6, 12, 24, \dots\}$

$$\text{تكون م. ه. أساسها } \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = 2$$

$$\text{كذلك } 2, 6, 18, 54, \dots = \text{أساسها } = 3$$

ويرمز بالحد الأول (P) والأساس بـ r

والصورة العامة للمتواليات الهندسية التي

أول حدها (P) وأساسها r هي

$$P, Pr, Pr^2, \dots \text{ ويرمز هنا بالأساس بـ r}$$

بقوة تقص عن رتبة الحد به مقدار واحد

$$\text{وعلى ذلك فإن } P = \frac{Pr}{r} = \frac{Pr^2}{r^2} = \dots$$

(27)

والحد العام للمتواليات الهندسية

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

① مثال على ذلك أوجد الحد الخامس في المتواليات الهندسية 3، 9، 27، ...

$$3 = \sqrt[3]{27} \quad 3 = \frac{9}{3} = \sqrt[3]{27} \quad 3 = \sqrt[3]{27}$$

$$243 = \sqrt[5]{243} = (3) \times 3 = 4 \times 3 = 12$$

② مثال أوجد الحد السابع في المتواليات الهندسية

$$81 - 27 < 9$$

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{27}{81}$$

$$\frac{81}{27 \times 27} = \frac{1 \times 81}{3 \times (3) \times 3 \times (3)} = \left(\frac{1}{3}\right) \times 81 = 6 \times 3 = 18$$

$$\frac{1}{9} = \frac{3}{27} = \frac{9}{27 \times 3}$$

مثال

$$\frac{1}{9} = \frac{9}{27 \times 3}$$

الباب الثاني

المثويات الهندسية

إذا كان لدينا مجموعة الأعداد وكان كل
 حد مقسوما على سابقه يعطي مقداراً ثابتاً
 فإن هذه الأعداد تكون ما يسمى مثويات
 الهندسية ومقدار الثابت هو أساسها
 مثال على ذلك $\{3, 6, 12, 24, \dots\}$ تكون

$$r = \frac{24}{12} = \frac{12}{6} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\text{كذلك } \{1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots\} \text{ فإن } r = \frac{32}{16} = \frac{16}{8} = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{كذلك } \{1, 3, 9, 27, 81, \dots\} \text{ فإن } r = \frac{81}{27} = \frac{27}{9} = \frac{9}{3} = 3$$

ويرمز بالحد الأول «أ» والاساس «ر»

والصورة العامة للمثويات الهندسية التي أول

حدها (أ) واساسها «ر» هي

$$A, Ar, Ar^2, Ar^3, \dots$$

يرفع بقوة «ن» عن رتبة الحد بمقدار «ن»

وعلى ذلك فإن ${}^9P = {}^9C = {}^{10}P = {}^{10}C$ وهكذا

والحد العام ${}^n C = {}^{n-1} C$ فأيون متواليان ههنا

① مثال على ذلك اوجد الحد الخامس في المتواليان الهندسية 3، 9، 27، ...

$$\boxed{3 = P_{10}} \quad \text{الحل} \quad 3 = \frac{9}{3} = r \quad \boxed{3 = r} \quad {}^4P = {}^5C$$

$$243 = (3)^5 = (3)^4 \times 3 = (r)^4 = {}^4C = {}^5C$$

مثال الثاني : م، هـ حدها العاشر 1280 وحدها الأول = 5 اوجد اساسها

$$\boxed{{}^9P = {}^{10}C} \quad \text{الحل} \quad 5 = r \quad 5 = r \quad \text{بالتعويض}$$

$$\frac{1280}{5} = 1280 = {}^9C = {}^9P = 1280$$

$$256 = {}^9C = 256$$

(30)

$$① \leftarrow P = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

$$② \leftarrow {}^5P = 24 \Rightarrow 24 = \frac{3}{6}$$

$$16 = \frac{4}{3} = \frac{24}{\frac{3}{2}} = \frac{{}^5P}{P} = ② \text{ على } ①$$

$$2 \pm = \frac{4}{2} = \frac{4}{2}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{2} = (2 \pm) \times P \text{ بالتعويض}$$

$$\frac{765}{4} = 255 \times \frac{3}{4} = \frac{(1 - \frac{8}{2}) \frac{3}{4}}{1 - 2} = 8$$

$$\frac{256 - 1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{[(\frac{8}{2} - 1) - 1] \frac{3}{4}}{(2 - 1) - 1} \text{ او}$$

$$\frac{225}{4} =$$

ايجاد مجموع المتواليات الهندسية بدلالة
الحده الأخير والأساس

اذا رمزنا للحده النوني في المتواليات الهندسية

$$\text{بالرمز } L \text{ فإن } L = P^{1-n}$$

$$\text{طرق المعاداة هي } L = P^{1-n} \times \frac{1}{P}$$

31

$$P = \frac{1}{r}$$

والتعويض في القانونين

$$\frac{(r-1)P}{r-1} \text{ أو } \frac{(1-r)P}{1-r} = P$$

~~P~~

12P

الدوال المثلثية

- الاهداف : في نهاية هذا البحث ينبغي ان يكون القارئ قادرا على ان :
- يتعرف الدوال الاساسية للزوايا (حاجتا ، طتا)
 - يتعرف اشارات الدوال المثلثية في الارباع الاربعة
 - يعرف له مجموع الزوايا المتكافئة للمثلث في الدوال المثلثية (حاجتا + حاجتا) = حاجتا = ص
 - يعرف مقلوب الدوال المثلثية الاساسية
 - يستنتج الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة
 - يعرف الاشكال الهندسية للدوال المثلثية الاساسية
 - يستخدم الآلة الحاسبة في إيجاد الدوال المثلثية

الدوال المثلثية

لتفرض الزاوية الموجبة α و β في وضعها القياسي بـ (أ) و (ب) دائرة الوحدة

فـ (أ) و (ب) هما ترسيمان لـ α و β

ويقطعهما في α و β و γ و δ

ونترسم α و β ويقطعهما في α و β

حيث α و β وثلاثي الشكل المقابل

لأنه عندما يتغير α بالزيادة في الفترة

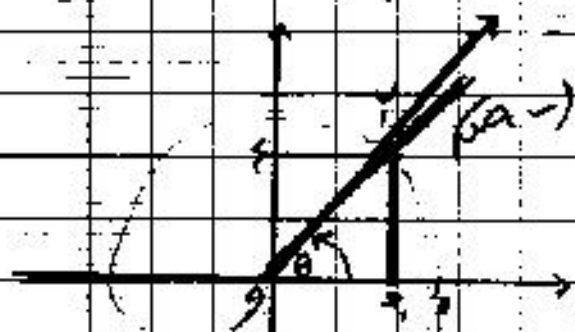
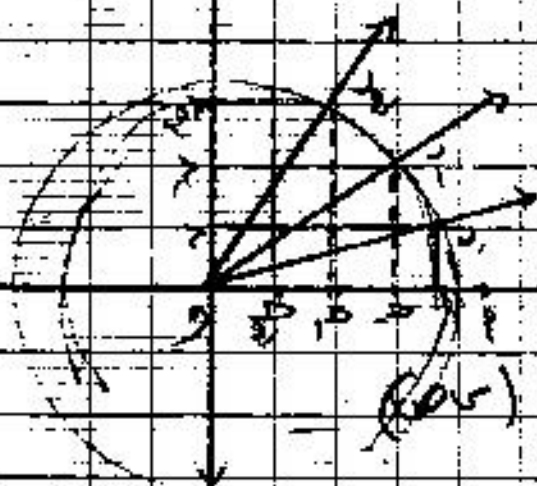
$[0, 2\pi]$ إن قيمة α تتغير بالتقدم

فحين تتغير قيمة α بالزيادة

أي أن إحداثيات نقطة α تتوقف

على قيمة الزاوية α

بـ (أ) و (ب) دوال α



تعريف:

لأي زاوية موجبة α في الوضع القياسي

وضاعها النهائي يقطع دائرة الوحدة

في النقطة بـ (أ) و (ب) إحداثيات الزاوية α فـ

بـ (أ) و (ب) هما إحداثيات النقطة α ونكتب $\cos \alpha = x$

و $\sin \alpha = y$ و $\tan \alpha = \frac{y}{x}$ ونكتب $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$

و $\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$ ونكتب $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$

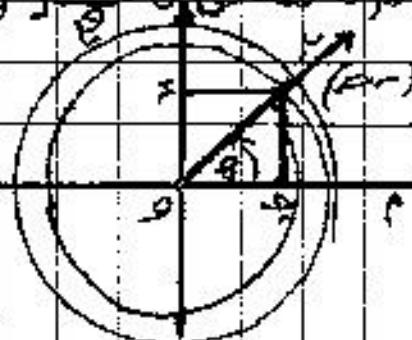
و $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$

و هذه الدوال تسمى الدوال المثلثية الأساسية للزاوية

هذه التعاريف تعتمد على إحداثيات النقطة (أ) و (ب) و هما α و β

في دائرة الوحدة α و β و γ و δ

إذا وقع α في الربع الأول فإن $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ و تكون $\sin \alpha \geq 0$ و $\cos \alpha \geq 0$



كما في هذا الشكل:

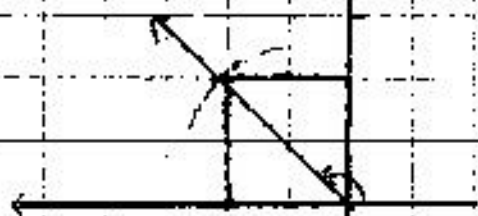
و على هذا تكون جميع

الدوال المثلثية

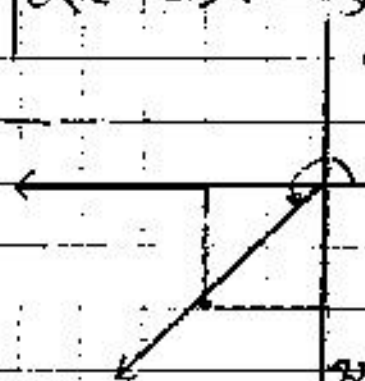
موجبة

و لا و α و β

إذا وقع θ في الربع الثاني فلا $\in [0, \frac{\pi}{2}]$ وتكون $\sin \theta > 0$ ، $\cos \theta < 0$ كما في هذا الشكل وفي هذه الحالة يكون الجيب فقط موجبا.

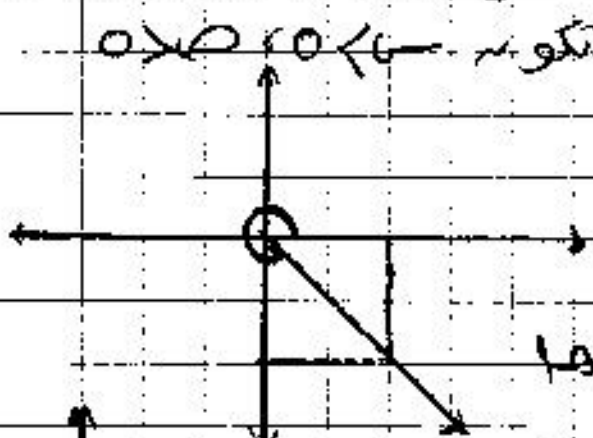


إذا وقع θ في الربع الثالث فلا $\in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ وتكون $\sin \theta < 0$ ، $\cos \theta < 0$ كما في هذا الشكل.



في هذه الحالة الجيب فقط يكون موجبا.

إذا وقع θ في الربع الرابع فلا $\in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$ وتكون $\sin \theta < 0$ ، $\cos \theta > 0$ كما في هذا الشكل.



وعلى هذا يكون جيب تمام فقط موجبا.

مجموع الزوايا المتكافئة لها نفس الدوال المثلثية.

في دائرة الوحدة $\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta$ ، $\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta$
 $\sin(\theta + 4\pi) = \sin \theta$ ، $\cos(\theta + 4\pi) = \cos \theta$
 $\sin(\theta + 6\pi) = \sin \theta$ ، $\cos(\theta + 6\pi) = \cos \theta$
 حيث $\theta \in [0, 2\pi]$ كما في هذا الشكل.

نشاط تدريبي:

اكتب إشارة الدوال المثلثية الآتية:

ظل 300° ، جتا 300° ، جتا $5\pi/4$ ، ظل 869°

35

إذا كانت اوت زاوية في وضعها القياسي في دائرة الوحدة
أوجد البروال المثلثية الأساسية للزاوية θ إذا كان
احدا ثبات θ ب هـ:

$$(0, 1) \textcircled{3}, (0, \frac{1}{2}) \textcircled{2}, (1, 0) \textcircled{4}$$

27-2-2020

الحل:

اوقات: $\frac{1}{2}$ ساعة $\frac{1}{2}$ ساعة $\frac{1}{2}$ ساعة $\frac{1}{2}$ ساعة $\frac{1}{2}$ ساعة

$$\frac{3V}{R} = \frac{1}{L} \quad \Delta V = \varphi \text{ field}$$
$$\frac{3V}{2} = \frac{5}{2} p V, \quad \frac{3V}{2} = \frac{5}{2} p V, \quad \frac{3V}{2} = \frac{5}{2} p V$$
~~$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \quad \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \quad \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$~~
$$\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{5} = 1.2 \text{ m}$$
$$1 = \cos \theta, \quad \frac{1}{30} = \cos \theta$$

مکتوبہ الہیائی لکھنؤ

قَالَ لَمَعَ الزُّلُوفَةُ ①

الْأَدَامِيُّ السَّيْلِيُّ السَّهْمَةُ ②

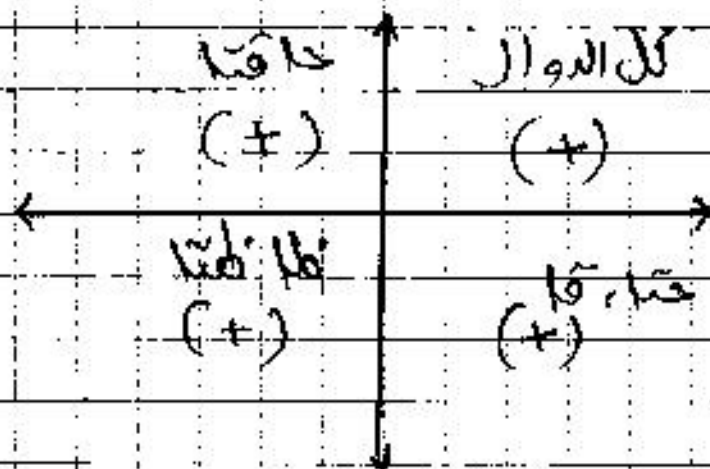
وَنَظَرَ قَالَهُ ③ = $\frac{1}{3}$

قاع الزاوية = 1 - استدارتي الماء بالزوايا $\frac{1}{\cos}$ ولكن قفا = 0

الحل العام الزاوية = $\frac{\text{الحدس في المثلث}}{\text{الحدس في المثلث}} \cdot \frac{\text{الزاوية}}{\text{الزاوية}}$

والعلم له إشارة مقابلة السؤال العقلية الأصلية التي هي فيه
إشارة السؤال العقلية الأصلية، حسب النوع الذي يقع فيه
الرؤية. واليه جدول يخص فيه جميع إشارات السؤال العقلية:

موقع الزرع الذي فيه الخلع النفاث	الفترة التي تقع فيها قياس الراوية	حاصلها	جاء قأ	ظلمت
الأول	$\left[\frac{b}{2}, 0 \right]$	+	+	+
الثاني	$\left[\frac{b}{2}, b \right]$	+	-	-
الثالث	$\left[b, \frac{3b}{2} \right]$	-	-	+
الرابع	$\left[\frac{3b}{2}, b \right]$	-	+	-



7. $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$, $\frac{d}{dx} x^{-2} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

$\frac{3V}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

أوجد قيمة $\sin 30^\circ$ ، $\cos 60^\circ$ ، $\tan 45^\circ$
 الكلي: المقادير $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ ، 1 ، 1 ، 1 ، 1

(c) $\frac{80 \text{ km} - 30 \text{ km} + 60 \text{ km}}{0 \text{ km} - 30 \text{ km} + 60 \text{ km}} = \frac{110 \text{ km}}{30 \text{ km}} = 3.67$

$$\frac{270 \text{ kPa} - 230 \text{ kPa} + 69 \text{ kPa} - 60 \text{ kPa}}{0 \text{ kPa} - 90 \text{ kPa} + 60 \text{ kPa}}$$

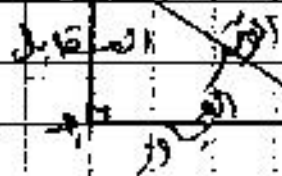
$$1 = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{1} + \frac{1}{3} = \frac{0 - 2\left(\frac{-3V}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right)}{1 - 3V \times \frac{3V}{2}} = 2 \times 6$$

التي جدول^٢ تلخص فيه نتائج الدورات الثلاث

270	180	90	60	45	30	360	الملاحظات
1	0	1	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	12
0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	1	جنا
غير معروف	0	غير معروف	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	0	16

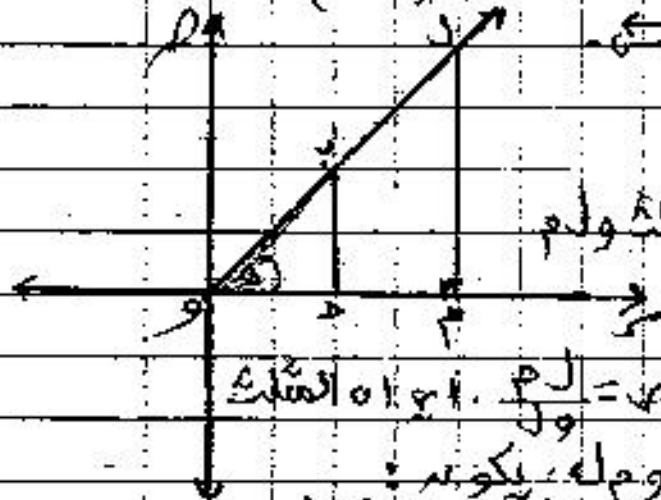
الدوال المثلثية للزاوية الحادة

إذا كان لدينا مثلث ABC القائم الزاوية في C ، فإننا نعرف أن:
 الضلع المقابل للزاوية A وهو BC يسمى الوتر المقابل للزاوية A
 فإنها ليست هي AC ، زاوية B هي الزاوية التي هي AC هي الوتر المقابل للزاوية B
 فإذا اعتبرنا الزاوية B كما في الشكل التالي:



فإن AC هي المقابيل، BC هي المجاور، أما إذا اعتبرنا الزاوية A فإنه قد يسمى المجاور BC والمقابل AC .

لدينا $\sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ونضعها القياسي، حيث قياس (A) هو 30° ،
 ويقطع دالة الوحدة ضلعا النهاية في نقطة P ، نأخذ
 نقطة (P) ونرسم $PM \perp OM$ ونكتب:
 الارتفاع PM هو $\sin A$.



بما أن $\sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ وبما أن $\cos A = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ ولأن $\sin A = \frac{PM}{1}$ و $\cos A = \frac{OM}{1}$

$$\sin A = \frac{PM}{1} = PM, \quad \cos A = \frac{OM}{1} = OM$$

قائم الزاوية C ومثلث ABC يكون:

$$\sin A = \frac{BC}{AB}, \quad \cos A = \frac{AC}{AB}, \quad \tan A = \frac{BC}{AC}$$

$$\sec A = \frac{AB}{AC}, \quad \csc A = \frac{AB}{BC}, \quad \cot A = \frac{AC}{BC}$$

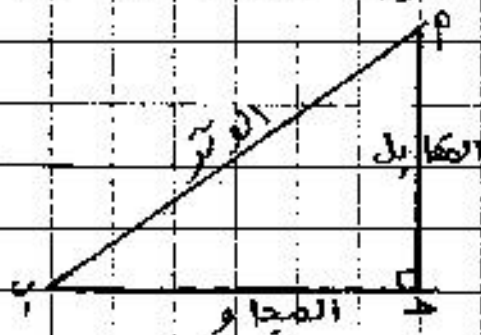
بما أن $\sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ وبما أن $\cos A = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ وبما أن $\tan A = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

وعلى ذلك فإن $\sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ وبما أن $\cos A = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ وبما أن $\tan A = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

$$\sin A = \frac{\text{طول المقابل}}{\text{طول الوتر}}, \quad \cos A = \frac{\text{طول المجاور}}{\text{طول الوتر}}$$

$$\tan A = \frac{\text{طول المقابل}}{\text{طول المجاور}}, \quad \sec A = \frac{\text{طول الوتر}}{\text{طول المجاور}}$$

$$\csc A = \frac{\text{طول الوتر}}{\text{طول المقابل}}, \quad \cot A = \frac{\text{طول المجاور}}{\text{طول المقابل}}$$



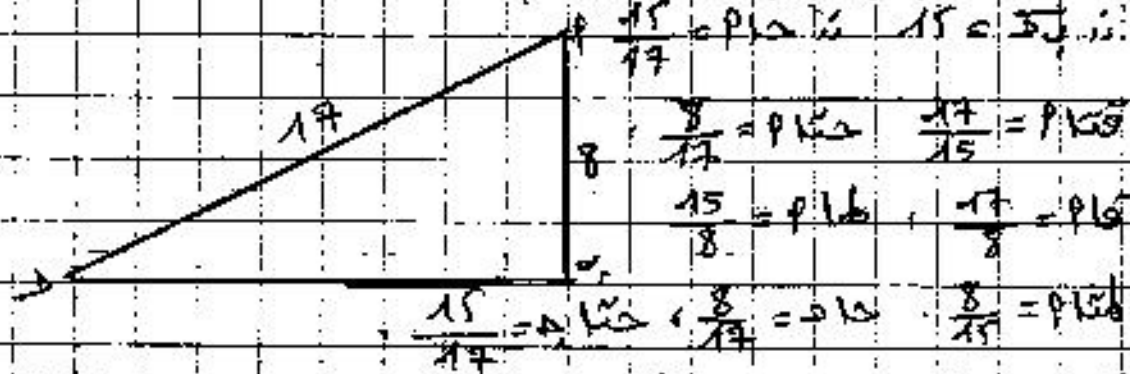
40

م. ب. ح. م. ث. قائم الزاوية في 8 و 6 و 4 و 2 و 1 و 17 م.

أوجد الدوال المتناوبة، الكدمية الزاوية P و Q .

الحل: $225 = 64 - 229 = {}^2(4, 4) - {}^2(\hat{4}, 4) - {}^2(4, \hat{4})$

$\frac{15}{47}$



$$\frac{8}{17} = p_{K2} \quad \frac{17}{15} = p_{K3}$$

$$\frac{15}{8} = 1\frac{1}{2}, \quad \frac{17}{8} = 2\frac{1}{8}$$

$$\frac{15}{15} = 1 \text{ kg} \quad \frac{8}{15} = 0.53 \text{ kg} \quad \frac{8}{15} = 0.53 \text{ kg}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

حاصل ہے:

عدد مناهج في = 9 - 10 = 13 كم ، و عدد قيمه كل صيغ :

• 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95, 105, 115, 125, 135, 145, 155, 165, 175, 185, 195, 205, 215, 225, 235, 245, 255, 265, 275, 285, 295, 305, 315, 325, 335, 345, 355, 365, 375, 385, 395, 405, 415, 425, 435, 445, 455, 465, 475, 485, 495, 505, 515, 525, 535, 545, 555, 565, 575, 585, 595, 605, 615, 625, 635, 645, 655, 665, 675, 685, 695, 705, 715, 725, 735, 745, 755, 765, 775, 785, 795, 805, 815, 825, 835, 845, 855, 865, 875, 885, 895, 905, 915, 925, 935, 945, 955, 965, 975, 985, 995, 1005, 1015, 1025, 1035, 1045, 1055, 1065, 1075, 1085, 1095, 1105, 1115, 1125, 1135, 1145, 1155, 1165, 1175, 1185, 1195, 1205, 1215, 1225, 1235, 1245, 1255, 1265, 1275, 1285, 1295, 1305, 1315, 1325, 1335, 1345, 1355, 1365, 1375, 1385, 1395, 1405, 1415, 1425, 1435, 1445, 1455, 1465, 1475, 1485, 1495, 1505, 1515, 1525, 1535, 1545, 1555, 1565, 1575, 1585, 1595, 1605, 1615, 1625, 1635, 1645, 1655, 1665, 1675, 1685, 1695, 1705, 1715, 1725, 1735, 1745, 1755, 1765, 1775, 1785, 1795, 1805, 1815, 1825, 1835, 1845, 1855, 1865, 1875, 1885, 1895, 1905, 1915, 1925, 1935, 1945, 1955, 1965, 1975, 1985, 1995, 2005, 2015, 2025, 2035, 2045, 2055, 2065, 2075, 2085, 2095, 2105, 2115, 2125, 2135, 2145, 2155, 2165, 2175, 2185, 2195, 2205, 2215, 2225, 2235, 2245, 2255, 2265, 2275, 2285, 2295, 2305, 2315, 2325, 2335, 2345, 2355, 2365, 2375, 2385, 2395, 2405, 2415, 2425, 2435, 2445, 2455, 2465, 2475, 2485, 2495, 2505, 2515, 2525, 2535, 2545, 2555, 2565, 2575, 2585, 2595, 2605, 2615, 2625, 2635, 2645, 2655, 2665, 2675, 2685, 2695, 2705, 2715, 2725, 2735, 2745, 2755, 2765, 2775, 2785, 2795, 2805, 2815, 2825, 2835, 2845, 2855, 2865, 2875, 2885, 2895, 2905, 2915, 2925, 2935, 2945, 2955, 2965, 2975, 2985, 2995, 3005, 3015, 3025, 3035, 3045, 3055, 3065, 3075, 3085, 3095, 3105, 3115, 3125, 3135, 3145, 3155, 3165, 3175, 3185, 3195, 3205, 3215, 3225, 3235, 3245, 3255, 3265, 3275, 3285, 3295, 3305, 3315, 3325, 3335, 3345, 3355, 3365, 3375, 3385, 3395, 3405, 3415, 3425, 3435, 3445, 3455, 3465, 3475, 3485, 3495, 3505, 3515, 3525, 3535, 3545, 3555, 3565, 3575, 3585, 3595, 3605, 3615, 3625, 3635, 3645, 3655, 3665, 3675, 3685, 3695, 3705, 3715, 3725, 3735, 3745, 3755, 3765, 3775, 3785, 3795, 3805, 3815, 3825, 3835, 3845, 3855, 3865, 3875, 3885, 3895, 3905, 3915, 3925, 3935, 3945, 3955, 3965, 3975, 3985, 3995, 4005, 4015, 4025, 4035, 4045, 4055, 4065, 4075, 4085, 4095, 4105, 4115, 4125, 4135, 4145, 4155, 4165, 4175, 4185, 4195, 4205, 4215, 4225, 4235, 4245, 4255, 4265, 4275, 4285, 4295, 4305, 4315, 4325, 4335, 4345, 4355, 4365, 4375, 4385, 4395, 4405, 4415, 4425, 4435, 4445, 4455, 4465, 4475, 4485, 4495, 4505, 4515, 4525, 4535, 4545, 4555, 4565, 4575, 4585, 4595, 4605, 4615, 4625, 4635, 4645, 4655, 4665, 4675, 4685, 4695, 4705, 4715, 4725, 4735, 4745, 4755, 4765, 4775, 4785, 4795, 4805, 4815, 4825, 4835, 4845, 4855, 4865, 4875, 4885, 4895, 4905, 4915, 4925, 4935, 4945, 4955, 4965, 4975, 4985, 4995, 5005, 5015, 5025, 5035, 5045, 5055, 5065, 5075, 5085, 5095, 5105, 5115, 5125, 5135, 5145, 5155, 5165, 5175, 5185, 5195, 5205, 5215, 5225, 5235, 5245, 5255, 5265, 5275, 5285, 5295, 5305, 5315, 5325, 5335, 5345, 5355, 5365, 5375, 5385, 5395, 5405, 5415, 5425, 5435, 5445, 5455, 5465, 5475, 5485, 5495, 5505, 5515, 5525, 5535, 5545, 5555, 5565, 5575, 5585, 5595, 5605, 5615, 5625, 5635, 5645, 5655, 5665, 5675, 5685, 5695, 5705, 5715, 5725, 5735, 5745, 5755, 5765, 5775, 5785, 5795, 5805, 5815, 5825, 5835, 5845, 5855, 5865, 5875, 5885, 5895, 5905, 5915, 5925, 5935, 5945, 5955, 5965, 5975, 5985, 5995, 6005, 6015, 6025, 6035, 6045, 6055, 6065, 6075, 6085, 6095, 6105, 6115, 6125, 6135, 6145, 6155, 6165, 6175, 6185, 6195, 6205, 6215, 6225, 6235, 6245, 6255, 6265, 6275, 6285, 6295, 6305, 6315, 6325, 6335, 6345, 6355, 6365, 6375, 6385, 6395, 6405, 6415, 6425, 6435, 6445, 6455, 6465, 6475, 6485, 6495, 6505, 6515, 6525, 6535, 6545, 6555, 6565, 6575, 6585, 6595, 6605, 6615, 6625, 6635, 6645, 6655, 6665, 6675, 6685, 6695, 6705, 6715, 6725, 6735, 6745, 6755, 6765, 6775, 6785, 6795, 6805, 6815, 6825, 6835, 6845, 6855, 6865, 6875, 6885, 6895, 6905, 6915, 6925, 6935, 6945, 6955, 6965, 6975, 6985, 6995, 7005,

میں اُن کے لئے ایک خاص جگہ پر جان بوجھ کر

الحمد لله

الإيجاد البرهان المنطوقية لإيجاد الوحدانية

توضيح: ملك قائم الزاوية لذلك نرسم $\angle A$ هكذا

$$12 = \frac{2}{3}(5) - \frac{2}{3}(10) \Rightarrow 12 = -\frac{10}{3} \quad \text{وهذا غير ممكن} \quad [2] = \frac{2}{3}(10) - \frac{1}{3}(5) = \frac{19}{3}$$

۱۰۰

$$\frac{13}{13} = 1.05, \frac{13}{2} = 0.65, \frac{18}{5} = 3.6, \frac{10}{12} = 0.83$$

ثانياً المقدار = كتاب كتاب كتاب كتاب

$$1 = \frac{144}{169} + \frac{95}{169} = \frac{19}{13} \times \frac{10}{13} + \frac{5}{13} \times \frac{5}{13}$$

مثال ۳:

۱۰۸۳ م راجعہ جزیہ موجبات و کما۔ $\frac{5}{4} = 1.25$, $\frac{5}{9}$

المحرقة

① جميع البؤل المتألفة لكل من الزاويين ٩ و ١٠

$$\varphi_1 \sim \rho_1 \sqrt{a} + \mu \sqrt{a} \rho_1^5 \quad (2)$$

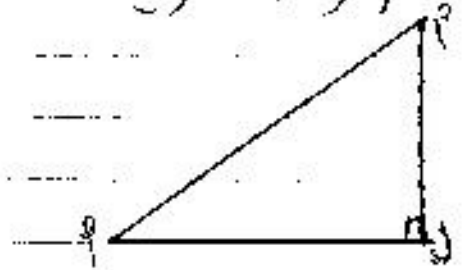
25

أولها: عرفنا الزاوية θ في المثلث P القائم الزاوية فقل

$$\frac{5}{4} = \frac{pp}{jp} = \frac{p16}{p16}$$

فلذا اعتبرنا أن $p = 5$ وحدات طولية ، $q = 4$ وحدات طولية
 فإن $l = m = 3$ نفس الوحدات الطولية .

∴ $حاج = \frac{3}{5}$ ، $حتا = \frac{4}{5}$ ، $طام = \frac{3}{4}$ ، $قنا = \frac{3}{5}$ ، $طكتا = \frac{3}{4}$ ، $قكتا = \frac{3}{5}$ ، $طكتا = \frac{3}{4}$ ، $قكتا = \frac{3}{5}$



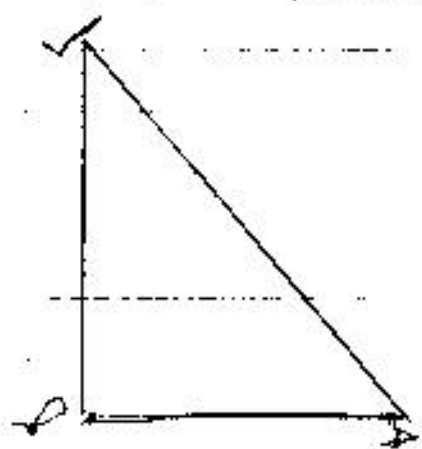
نرسم المثلث بـ p قائم الزاوية في $ص$

لكتا $= \frac{5}{12} = \frac{34}{12}$ فإن $ك = 5$ وحدات طولية

بـ $ص = 12$ وحدة طولية فإن $ب = 13$ وحدة طولية
 نفس الوحدات الطولية .

$\frac{12}{5} = طام$ ، $\frac{12}{13} = حتا$ ، $\frac{5}{13} = طام$ ، $\frac{12}{5} = طام$ ، $\frac{12}{13} = حتا$ ، $\frac{5}{13} = طام$

قنا $= \frac{3}{5}$ ، قنا $= \frac{3}{5}$ ، قنا $= \frac{3}{5}$ ، قنا $= \frac{3}{5}$ ، قنا $= \frac{3}{5}$ ، قنا $= \frac{3}{5}$



ثانياً : المقدار $حام حتا + حتا حام$
 $\frac{63}{65} = \frac{48 \times 12}{65} - \frac{12}{13} \times \frac{4}{5} + \frac{5}{13} \times \frac{3}{5} =$

ثانياً ونرى

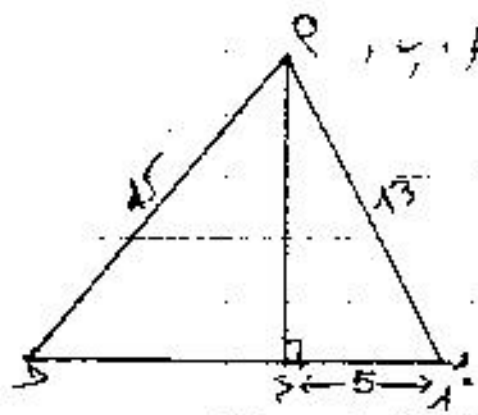
(١) إذا كان $p = 6$ مثلث قائم الزاوية في $ب$ وكان $حاج = 6$ ،

فأوجد قيمة $حام حتا + حتا حام$.

(٢) إذا كان $ق = 6$ ، زاوية حادتين $ك$ و $ب$ كان $ق = 12 = 165$ ،

حاج $ق = 15$ ، أوجد قيمة $ق$.

أولاً : الدوال المثلثية لكل من الزاويتين $ك$ و $ب$ ،



ثانياً : $طام = 5$ ، $قنا = 5$ ، $طام = 5$ ، $قنا = 5$ ، $طام = 5$ ، $قنا = 5$

في الشكل المقابل أوجد :

أولاً : قيم الدوال المثلثية الثلاثة لكل من

الزاويتين $ك$ و $ب$.

ثانياً : أثبت أنه : $طام (ح ب) + حتا (د ح) = (ح ب) + (د ح)$
 ثالثاً : أثبت أنه : $طام (ح ب) + حتا (د ح) = (ح ب) + (د ح)$
 رابعاً : أثبت أنه : $طام (ح ب) + حتا (د ح) = (ح ب) + (د ح)$

إيجاد الدوال المثلثية لأبواب زاوية

ومن أجل إيجاد الدوال المثلثية لأبواب زاوية بالرسم، فمثلاً لإيجاد الدوال المثلثية للزاوية 40° نرسم الزاوية (40°) في وضعها القياسي بحيث $(د ا ب)$ 40° ، ونضع ضلعها النهائي $(ا ب)$ الوحدة في $(ب)$ $ص$ ، ونعين $(ب ص)$ فيكون $ص = 0.766$ ، $ح = 0.6428$ ، $ط = 0.4067$ $ص = 0.85$ ، ويتضح لنا أنه بهذه الطريقة نحتاج إلى دقة كبيرة في الرسم، كما أنها تعطي نتائج تقريبية ولا يمكن استخدامها في حساب الدوال المثلثية للزوايا تقسّم على كسور من الدرجة.

إيجاد الدوال المثلثية بواسطة حاسبة الجيب

ههنا كانت قيمة الزاوية باستخدام المقاييس يمكن إيجاد الدوال المثلثية،
 $\sin$ وتعني جيب الزاوية، ونرمز له بالرمز $\sin$
 $\cos$ وتعني جيب تمام الزاوية، ونرمز له بالرمز $\cos$
 $\tan$ وتعني ظل الزاوية، ونرمز له بالرمز $\tan$
 ونستخدم لتحويل كسور الدرجات من دقائق إلى كسور ما عشرة من الدرجة.

مثال ١:
 أوجد قيم الدوال المثلثية للزوايا الآتية:
 (١) 40° ، (٢) 17° ، (٣) 1.9°
 الحل:

بعد تشغيل حاسبة الجيب نضغط على المقاييس بالتريسيث الثلاث من جهة اليسار:

0.6427879 $\sin 40^\circ$ 0.4067366 $\cos 40^\circ$ 0.8571673 $\tan 40^\circ$

نلاحظ أن 0.6427879 بعد إيجاد 40° اضغط على المقاييس $1/x$ يظهر على الشاشة 1.5557 $\cos 40^\circ = 0.7660444$ $\sin 40^\circ = 0.6427879$

(43)

ولايجاد جتا 40° اضعف كل المفتح ثم انكاه
 يظهر $0,766$ $\cos 40^\circ \rightarrow$ ابدأ

ن جتا $40^\circ = 0,766$.

لايجاد قتا 40° اضعف بعد ايجاد جتا كل المفتح $\frac{1}{4}$
 ن قتا $40^\circ = 0,766$.

لايجاد ظل 40° اضعف كل المفتح بفتح، بالترتيب الآتي
 مع جهة اليسار:

ن ظل $40^\circ = 0,839$ $\tan 40^\circ \rightarrow$ ابدأ

لايجاد طتا 40° اضعف بعد ايجاد ظل 40° كل المفتح $\frac{1}{4}$
 ن طتا $40^\circ = 0,839$.

مثال ٢: قيم الدوال المثلثية للزاوية التي قياسها 17°
 توجد الزاوية بالدرجات كالتالي:

$180,2833$ يظهر 17° $\cos 180,2833 \rightarrow$ ابدأ

ثم احقق هذا العدد في الدفتر بالفتح على $[Mr]$ أو $[Hind]$
 لا مسترجعه عند الحاجة:

لايجاد جتا 17° $\cos 180,2833$ اضعف كل $\sin$ يظهر

$0,8635$ ن جتا $17^\circ = 0,8635$ ثم مفتح $\frac{1}{4}$

يظهر $1,158$ ن قتا $17^\circ = 1,158$.

لايجاد جتا 17° استخرج العدد السابق حفظه في الذاكرة

بالفتح على مفتح $[Mr]$ ثم مفتح $[Cos]$ يظهر قيمة

جتا الزاوية ثم مفتح $\frac{1}{4}$ يظهر قيمة قتا الزاوية

ن جتا $17^\circ = 0,5043$ لاحظ إشارة (-) في المثال

ن قتا $17^\circ = 1,983$.

ن بالمثال ظل $17^\circ = 0,3047$ $\tan 17^\circ$ مع مفتح طما $[Tan]$

مثال ٣: الدوال المثلثية للزاوية 2° يوجد أولا قيمة الزاوية

بالدرجات: $2^\circ = 1,2^\circ \times 1,2 = 17,373$ $68,7276$

جتا $2^\circ = 0,9993$ جتا $0,3628$ طتا $0,5785$

جتا $1,0731$ قتا $0,7563$ طتا $0,3893$

مثال ٤
 ١٢٤

من أجل حل هذه المسألة، نحتاج إلى معرفة وحدة القياس بالدرجات
 إلى القياس بالزوايا (وهي وحدة القياس الدائرية للزوايا).
 ونكتفي عندئذ بوضع هذا المفتاح على (RAD) فتكون الآلة
 على نظام القياس الدائري ثم لضغط على $\boxed{\sin}$ $\boxed{0}$ $\boxed{9380}$ $\boxed{=}$
 فيظهر على الشاشة قيمة الجيب $0,9380$.

وبالمثل قيمة الدوال المتكسبة
 أما إذا كانت الكاسية لا تحتوي على هذا النظام فيجب أولاً
 تحويل القياس الدائري إلى قياس مستقيم كما سبق.

قياس زاوية معلومة إحدى قيم الدوال المتكسبة لها
 نجد على كاسية الجيب فوق المفاتيح $\sin$, $\cos$, $\tan$ مطبوعاً
 بالأسفل الأخرى بالترتيب $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$ وهذا يعني
 جاب، حيث $\tan^{-1}$ وتسمى بالدوال العكسية للدوال السابقة
 على الترتيب حيث $\tan^{-1} \frac{1}{e}$ تعني القياس المحصور بين 0 و 180
 للزاوية التي جيبها يساوي $\frac{1}{e}$.

$$\begin{aligned} \sin^{-1} 0,6498 &= \theta \quad \text{حيث } \theta = 0,6498 \\ \cos^{-1} 0,2537 &= \theta \quad \text{حيث } \theta = 0,2537 \\ \tan^{-1} 1,4325 &= \theta \quad \text{حيث } \theta = 1,4325 \end{aligned}$$

لا يجب أن يخطئ مكيوب بالآلة عند حساب الجيب لا بد من
 التحقق أولاً على مفتاح $\boxed{\sin}$ قبل الضغط على المفتاح
 المطلوب كما يتضح في المثال التالي
 إذا كانت $\sin \theta = 0,27188$ أوجد θ (أ) للقر، حقيقة حيث
 $0^\circ < \theta < 90^\circ$

الحل: $\sin \theta = 0,27188$ نوجد أولاً زاوية باستخدام كاسية
 الجيب كالآتي:

$$\boxed{0,27188} \rightarrow \boxed{\sin^{-1}} \rightarrow \boxed{15}$$

ثم نوجد الزاوية $15,980546^\circ$ يظهر $\boxed{\sin}$ $\boxed{15}$ $\boxed{980546}$ $\boxed{=}$

ولذلك الزاوية بالدرجات والدقائق والثواني هي $15,980546^\circ$

اللوغاريتمات

الدالة اللوغاريتمية

سيعا أن در سنائی باب الأساس ان $3^5 = 125$

حيث 125 يسع العدد 5 يسع الأساس 3
يسع الأساس والمتساوية $3^5 = 125$ يمكن وضعه
في صورة أخرى مكافئة فنقول $3^5 = 125$
ونقرأ لوغاريتم العدد 125 للأساس 3 يساوي 5 وبذلك
نجد ان لو $3^5 = 125$ تسا في $5 = \log_3(125)$
ولو $3^5 = 125$ تكاف في $5 = \log_3(125)$

بالمثل نعلم ان $2^3 = \frac{1}{8}$: لو $2^{-3} = \frac{1}{8}$

ان لو $2^{-3} = \frac{1}{8}$ وهكذا نجد ان كل صورة اسية
اساسية عدد حقيقي $\neq 1$ نجد ان لها صورة أخرى
تكافئها تسع بالصورة اللوغاريتمية

لكل عدد حقيقي موجب $b \neq 1$ ولأي عدد حقيقي
موجب a يوجد عدد حقيقي واحد x بحيث
لو $a = b^x$ وتعني ان $x = \log_b(a)$

ونقرأ لوغاريتم العدد a للأساس b يساوي x
وهكذا نلاحظ ان العدد a هو القوي الضادية للأساس

مثال: لو $2^5 = 32$ لا $5 = \log_2(32)$
لو $3^4 = 81$ لا $4 = \log_3(81)$
لو $10^3 = 1000$ لا $3 = \log_{10}(1000)$

(47) وكذلك نجد $343 = 7^3$ تنافي لو $3 = 343$
 $5 = 243 = 3^5$ لو $5 = 243$
 $4 = \frac{1}{16} = 2^{-4}$ لو $4 = \frac{1}{16}$
 $1 = 5^0$ لو $1 = 5^0$ صفر

ملاحظة هامة:

العدد من المطلوب ابدأ ولو غاربتفه يجب ان يكون
 عدد حقيقيا موجبا ويترتب على ذلك انه لا معنى
 للمرتبة لو غاربت عدد سالب او لو غاربت الصفر بمعنى انه
 اذا $0 < 1$ لو $0 < 1$ فان $0 < 1$ يكون موجبا
 اي $0 < 1$ لو $0 < 1$ لو $0 < 1$ لو $0 < 1$ لو $0 < 1$
 اي انه اذا $0 < 1$ لو $0 < 1$ لو $0 < 1$ لو $0 < 1$ لو $0 < 1$
 ويترتب على ذلك ان كل من $0 < 1$ لو $0 < 1$ لو $0 < 1$ لو $0 < 1$ لو $0 < 1$

مثال محلول

عبر عما يلي بصورة أسية

(P) لو $128 = 7$ (C) لو $8 = 2^3$ (D) لو $\frac{1}{27} = 3^{-3}$

(5) لو $5 = 5$ الكل 7
 (P) لو $128 = 7$ (C) لو $8 = 2^3$ (D) لو $\frac{1}{27} = 3^{-3}$
 (5) لو $5 = 5$ (P) لو $128 = 7$ (C) لو $8 = 2^3$ (D) لو $\frac{1}{27} = 3^{-3}$

(2)

مثال محلولة

إذا كان $\log_2 (17 - x^2) = 6$ فما قيمة x ؟

الحل

$$\log_2 (17 - x^2) = 6 \Rightarrow (17 - x^2) = (2)^6 \Rightarrow 17 - x^2 = 64$$

$$x^2 = 17 - 64 = -47 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-47} \Rightarrow x = \pm i\sqrt{47}$$

يجعل العدد $(17 - x^2)$ كمية موجبةكل من $x = 9$ و $x = -9$ حل للمعادلة

$$\text{حل المعادلة } \log_2 (x^2 - \frac{3}{4}) = 2$$

الحل

$$\log_2 (x^2 - \frac{3}{4}) = 2 \Rightarrow (x^2 - \frac{3}{4}) = (2)^2 \Rightarrow x^2 - \frac{3}{4} = 4$$

$$x^2 - 4 = 3 \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm \sqrt{7}$$

$$1 = x^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

تحقق من أن $x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ حل للمعادلة

$$\log_2 (x^2 - \frac{3}{4}) = 2 \Rightarrow x^2 - \frac{3}{4} = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{19}{4} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{19}{4}} = \pm \frac{\sqrt{19}}{2}$$

مثال

$$\text{حل المعادلة } \log_2 (x^2 - 7) = 0$$

الحل

$$\log_2 (x^2 - 7) = 0 \Rightarrow (x^2 - 7) = (2)^0 \Rightarrow x^2 - 7 = 1$$

$$x^2 - 7 = 1 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm \sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$$

$$x = 0 \Rightarrow 0 = 8 \Rightarrow \text{لا يوجد حل}$$

(51)

مثال

$$\text{إذا كان } \log_{0.1} 0.001 = \frac{4}{n+3} \text{ فما قيمة } n$$

$$\frac{4}{n+3}$$

$$\log_{0.1} 0.001 = \frac{4}{n+3} \Rightarrow 0.001 = \frac{4}{n+3} \Rightarrow \log_{0.1} 0.001 = \frac{4}{n+3}$$

$$\frac{4}{n+3} \left(\frac{1}{10} \right) = \frac{1}{1000} \Rightarrow \frac{4}{n+3} \left(\frac{1}{10} \right) = \frac{1}{1000}$$

$$9-4 = n+3 \Rightarrow 4 = n+3+9 \Rightarrow \frac{4}{n+3} = 3$$

$$\boxed{\frac{5}{3} = n} \Rightarrow 5 = n+3$$

خواص الدالة اللوغاريتمية

خاصية (1) مجال الدالة اللوغاريتمية للروح $(0, \infty)$ من 0 فلا معنى للحديث عنه لوغاريتم عدد سالب أو لوغاريتم الصفر
خاصية (2) مدى الدالة اللوغاريتمية هو $\mathbb{R}$

خاصية (3) الدالة اللوغاريتمية من $\log_b a = \log a - \log b$ تكون

(أ) تزايدية في $\mathbb{R}$ إذا كان $b < 1$

كما هو واضح عند رسم الشكل البياني للدالة من $\log_3$

نلاحظ تناقصية في $\mathbb{R}$ إذا كان $b > 1$

كما هو واضح عند رسم الشكل البياني للدالة من $\log_{10}$
خاصية (4) حيث أنه لجميع قيم $b > 0$ - $b \neq 1$ $\log_b 1 = 0$

يكون $\log_b 1 = 0$ صفر. منحنى الدالة $\log_b$ يقطع محور

المماس في النقطة $(1, 0)$ دائماً

(6)

(52)

قوانین اللوغاریتمات

اذا كان a ، b من عددین حقیقیین موجبین، $a > 0$ ، $b > 0$

فإن القانون الاول

لوغاریتم حاصل ضرب عددین حقیقیین موجبین

الاساس معلوم يساوي مجموع لوغاریتمی العددین
لنفس الاساس ای ان

$$\log_a a \cdot b = \log_a a + \log_a b$$

الاثبات

$$\text{نفرض ان } \log_a a = 1 \quad \therefore \log_a a = 1$$

$$\text{لو } a \cdot b = \log_a a + \log_a b$$

من ①

$$\log_a a \cdot b = \log_a a + \log_a b$$

$$\therefore \log_a a \cdot b = \log_a a + \log_a b$$

: لو $a \cdot b = \log_a a + \log_a b$ والتعويض عن قيمتي

$$\log_a a = 1 \quad \therefore \log_a a + \log_a b = \log_a a + \log_a b$$

$$\text{فمثلا } \log_2 2 \cdot 7 = \log_2 2 + \log_2 7$$

$$\log_2 35 = \log_2 7 + \log_2 5 = \log_2 7 + \log_2 5$$

$$\text{والعكس } \log_5 22 = \log_5 2 + \log_5 11 = \log_5 2 + \log_5 11$$

(7)

(53)

$$\frac{2}{3} \log_7 = \left(\frac{8}{3} \times \frac{2}{8} \right) \log_7 = \frac{8}{3} \log_2 + \frac{2}{5} \log_7$$

تلييه

اذا كانت $\log_2, \log_3, \log_4, \dots, \log_7$ ب 2 3 4 5 6 7

$$\log_7 = (\log_2 \times \log_3 \times \log_4 \times \log_5 \times \log_6 \times \log_7) = \log_2 + \log_3 + \log_4 + \log_5 + \log_6 + \log_7$$

$$\log_7 = (7 \times 5 \times 3) = \log_7 + \log_5 + \log_3$$

$$\log_{10} = 30 = \log_{10} (5 \times 3 \times 2) = \log_{10} 5 + \log_{10} 3 + \log_{10} 2$$

$$= 0.06 \log_7 + \frac{4}{9} \log_2 + 75 \log_5$$

$$\log_2 = \left(\frac{6}{100} \times \frac{4}{9} \times 75 \right) \log_2$$

$$\log_2 = \log_2 (100 + 100) \neq \log_2 100 + \log_2 100$$

$$\log_2 = \log_2 (100 + 100) \neq \log_2 100 \times \log_2 100$$

القانون الثاني

لو غار يتم خارج قسمة عدد بين حقيقيين موجبين

لا يساوي معلوم يساوي لو غار يتم المقسوم لهذا

لا يساوي مطروحة منه لو غار يتم المقسوم عليه لنفس

$$\log_2 = \frac{100}{2} = \log_2 100 - \log_2 2$$

$$\text{فمثلا } \frac{2}{7} \text{ لو} = \frac{2}{3} \text{ لو} - \frac{2}{2} \text{ لو} = \frac{1}{7} \text{ لو} - 1 \frac{1}{4} \text{ لو} = \frac{5}{4} \text{ لو}$$

$$\frac{4}{7} \text{ لو} - \frac{5}{7} \text{ لو}$$

$$\text{والعكس صحيح } \frac{11}{5} \text{ لو} - \frac{2}{5} \text{ لو} = \frac{11}{2} \text{ لو}$$

$$\frac{3}{2} \text{ لو} = \frac{9}{6} \text{ لو} = \frac{4}{3} \times \frac{9}{8} \text{ لو} = \frac{3}{4} \text{ لو} - \frac{9}{8} \text{ لو}$$

$$\text{نتيجة لو} = \frac{11}{8} \text{ لو} = \text{لو} + \text{لو} + \text{لو} - \text{لو} - \text{لو}$$

تنبيه هام تذكر جيداً ان لو (ص - م) $\neq$ لو م - لو ص
كما ان لو (م - ص) $\neq$ لو م $\div$ لو ص

القانون الثالث

لو غاريتم عدد حقيقى موجب مرفوع لقوة ما بالنسبة
لا أساس معلوم يساوى حاصل ضرب لقوة في لو غاريتم
هذا العدد بالنسبة للاساس نفسه اى

$$\text{لو م} = 5 \text{ لو م}$$

$$\text{مثلا } \frac{1}{3} \text{ لو} = \frac{1}{5} \text{ لو} \times 3 \text{ لو} = \frac{1}{7} \text{ لو} = 5 \text{ لو}$$

$$\frac{1}{2} \text{ لو} = \frac{1}{2} (5) \text{ لو} = \frac{1}{2} \text{ لو}$$

$$\text{بالعكس } 2 \text{ لو} = 15 \text{ لو} = (15) \text{ لو} = 225 \text{ لو}$$

$$4 \text{ لو} = 37 \text{ لو} = (37) \text{ لو} = 2 (37) \text{ لو} = 74 \text{ لو}$$

القانون الرابع

لو غاريتم اى عدد حقيقى موجب لا اساس مساو لتلك العدد

$$\text{هو } 1 \text{ اى لو} = 1 \text{ حيث } 1 = 1 - 0$$

$$1 = 5 \text{ لو}_5 \text{ ل } 1 = 7 \text{ لو}_7 \text{ ل } 1 = 75 \text{ لو}_2 + \frac{4}{9} \text{ لو}_2 + 0.6$$

$$1 = 2 \text{ لو}_2 = \left(\frac{6}{100} \times \frac{4}{9} \times 75 \right) \text{ لو}_2 =$$

$$\frac{5}{9} \times \frac{27}{5} \text{ لو}_3 = \frac{9}{5} \text{ لو}_3 - \frac{27}{5} \text{ لو}_3 = 1 \frac{4}{5} \text{ لو}_3 - 5 \frac{2}{5} \text{ لو}_3$$

$$= \text{لو}_3 = 1 = 27 \text{ لو}_3 = 3 \text{ لو}_3 = 3 = 3 \text{ لو}_3$$

القانون الخامس

لو غارقيم الواحد الصحيح له مسائل ما = الصفر

$$1 \text{ لو}_1 = \text{صفر حسب } 2 - 1$$

$$1 = 0 \text{ ولو هو صفر حسب}$$

$$1 \text{ لو}_1 = 0 = 1 \text{ ولو هو صفر ولو غارقيم مقابل}$$

$$\text{الصفر الأساسية } 1 \text{ لو}_1 = 0$$

$$\text{مقابل } 1 \text{ لو}_5 = 0 \text{ لو}_7 = \text{صفر}$$

$$0 = 1 \text{ لو}_4 = \left(\frac{1}{8} \times 20 \times \frac{2}{5} \right) \text{ لو}_4 = 8 \text{ لو}_4 - 2 \text{ لو}_4 + \frac{2}{5} \text{ لو}_4$$

(57)

$$\text{لو} \frac{10}{2} = 5 \text{ لو} \quad \therefore \text{لو} 5 = \text{لو} \frac{10}{2} - 1 = \text{لو} 2 - 1 = \text{لو} \frac{2}{2}$$

$$\therefore \text{لو} 5 = 1 - 0.3010 \quad \therefore \text{لو} 5 = 0.6990$$

$$\text{لو} 5 = 1 - \text{لو} 2 < \text{لو} 2 = 1 - \text{لو} 5$$

المستمحلول

اثبت ان 4 لو 3 + 1 لو 2 هما لو غاريتميه
عددين لهذين متساويين واولهما لهذين العددين

الكل

$$4 \text{ لو} 3 = \text{لو} (3)^4 = \text{لو} 81$$

$$1 + 3 \text{ لو} 2 = 1 + \text{لو} (2)^3 = 1 + \text{لو} 8 = \text{لو} 10 + \text{لو} 8$$

$$= \text{لو} 80 = 8 \times 10 = \text{لو} 80$$

اللو غاريتميه المعلمان هما لو غاريتميه للعددين
81 و 80 ولهما عددان متساويان

ملخص قواعد الإشعاعية :

قوة : إذا كانت $P = (n)$ حيث P ثابت فلا بد $n = 0 = (n)$

مثلا : $n = 0 = (n)$ فلا بد $n = 0 = (n)$

والنمط $7 \times 25 = 175$ فلا بد $n = 0 = (n)$

ثانيا : إذا كانت $n = (n)$ حيث n عدد صحيح فلا بد $n = 0 = (n)$

مثلا : $n = 0 = (n)$ فلا بد $n = 0 = (n)$

$n = 0 = (n)$ فلا بد $n = 0 = (n)$

ثالثا : إذا كانت $n = (n)$ حيث n عدد صحيح فلا بد $n = 0 = (n)$

مثلا : $n = 0 = (n)$ فلا بد $n = 0 = (n)$

ص : إذا كانت $n = (n)$ فلا بد $n = 0 = (n)$

مثلا : $n = 0 = (n)$ فلا بد $n = 0 = (n)$

رابعا : إذا كانت $n = (n)$ حيث n عدد صحيح فلا بد $n = 0 = (n)$

مثلا : $n = 0 = (n)$ فلا بد $n = 0 = (n)$

مثلا : $n = 0 = (n)$ فلا بد $n = 0 = (n)$

مثلا : $n = 0 = (n)$ فلا بد $n = 0 = (n)$

مثلا : $n = 0 = (n)$ فلا بد $n = 0 = (n)$

ملاحظة : عند إجراء العمليات تذكر العمليات جمع النصوص أو طرحها

أو ضربها أو قسمتها

وتذكر كذا الأقسام والعمليات عليها

السفاح

المشتقة الأولى لحاصل ضرب Δ التية أو أكثر
يساوي مشتقة الدالة الأولى ضرب الدالة الثانية زائد مشتقة
الدالة الثانية ضرب الدالة الأولى .

مثال: اوجد المشتقة الاولى لكل مما يلي:

$$(5 - \frac{2}{3})(3 + \frac{2}{3}) = 0$$

$$(3 + \frac{e}{2})^2 - 6 + (5 - \frac{e}{2} - 4) - 2 = \underline{0} ; \text{د}$$

$$\frac{2}{5} \times 18 + \frac{4}{5} \times 6 + \frac{6}{5} \times 10 = \frac{2}{5} \times 4 =$$

$$\checkmark 10 - \frac{4}{5} \cdot 18 + \frac{4}{5} \cdot 10 =$$

$$70) \frac{2}{5} + (2 - \frac{2}{5})(\frac{2}{5} - 1) = \frac{2}{5} \leftarrow (2 - \frac{2}{5})(\frac{1}{5} - 5) = 2$$

أَتَحْصِلُ إِلَيْهَا قَبْلَ بَيْعِ الْأَقْوَانِ سَاءَ وَجَمْعُ الْخُدُودِ الْمَتَقَابِلَةِ

اذا كانت r دوالاً لها مشتقة بالنسبة المتغير s ،

$$(-1)^0 \cdot (-1)^1 \cdot (-1)^2 = 1 \cdot (-1) \cdot 1 = -1$$

$$(-) \times (-) = (+) \quad (+) \times (-) = (-) \quad (-) \times (+) = (-) \quad (+) \times (+) = (+)$$

$$(-) \cdot x(\sqrt{}) > x(\sqrt{}) \cdot (-) +$$

مقاله ۱: اوجده المشتقة الأولى للدالة (2) $\frac{1}{x^2}$ ام:

$$\cdot (1 + 4 - 2)(5 - 2)(3 + 2 - 2) = (5) \times$$

شم اوجده (0)

الحل :

$$(1 + \sqrt{4 - \frac{3}{e}})(3 + \frac{3}{e})\sqrt{e} + (1 + \sqrt{4 - \frac{3}{e}})(5 - \frac{e}{e})\sqrt{e} = (\sqrt{e})^5$$

$$(5 - \frac{2}{3})(3 + \frac{3}{2} - 2)(4 - \frac{2}{3} - 3) +$$

$$60 = (5-) \times 3 \times (4-) + 1 \times 3 \times 0 + 1 \times (5-) \times 0 = (0) \times$$

ملحوظة: من المهم هنا مراجعة وتذكر الملاحظات الهامة حول قواعد الاشتقاق، والملاحظات حول هذا الكتاب المستند للمساعدة على حل المسائل.

3 Jan

3 مثال
اوجد ميل المماس للمنحنى $y = (x^2 + 3x - 2)(1 + x)$ عند النقطة $(0, -1)$ الواقعة عليه.

إكل $(2 + \sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}})z + (1 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$
 $3 - \sqrt{2} = (2 + \sqrt{3} - 1)z + (1 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = \frac{(\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$

∴ ميل المماس عند النقطة $(0, 1) = 3 - \sqrt{2}$

- أوجد قياس الزاوية الموضوعة التي يصنعها المماس للمنحنى ;

$\angle (P) = (P) = (1 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات
 عند النقطة $(-1, 1)$ الواقعة على المنحنى.

الحل :

$(1 - \sqrt{2}) + (3 + \sqrt{2})z = (P)$

$1 = (1 - 1) + (3 + 1) \times 1 \times 3 = (1 - \sqrt{2})$

∴ ميل المماس للمنحنى عند النقطة $(-1, 1) = (3 - \sqrt{2})$

∴ $\theta = 45^\circ$ ∴ $1 = \theta$

وعليه فإن قياس الزاوية الموضوعة التي يصنعها المماس للمنحنى

عند النقطة $(-1, 1) = 45^\circ$

- أوجد معادلة المماس للمنحنى $(P) = (2 - \sqrt{3})(4 - \frac{2}{\sqrt{3}})$ عند

النقطة $(0, 2)$ الواقعة على المنحنى.

إكل $(2 - \sqrt{3})z + (4 - \frac{2}{\sqrt{3}}) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$4 = (4 - 2) \times 4 \times 3 + (4 - 8) = \frac{2(\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$

∴ ميل المماس للمنحنى عند النقطة $(0, 2) = 4$

وعليه فإن معادلة المماس هي $4 = \frac{0 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$

أي أنه $4 = 8 - \sqrt{3} - 4 = 0$ أو $0 = 8 - \sqrt{3} - 4$

- أوجد النقطة الواقعة على المنحنى $(P) = (5 - \frac{2}{\sqrt{3}})(1 + \sqrt{2})$

والتي يكون المماس موازاً للمستقيم $3z + 5 - \sqrt{2} = 0$

إكل $(1 + \sqrt{2})z + (5 - \frac{2}{\sqrt{3}}) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ ميل المماس

$5 - \frac{2}{\sqrt{3}} + 4 + 10 - \frac{2}{\sqrt{3}} = 2$

$6 - \frac{2}{\sqrt{3}} + 10 - 2 = 0$ و $10 - 2 = 0$ فتوصلنا إلى

- أذا كان المماس موازاً للمستقيم $3z + 5 - \sqrt{2} = 0$

∴ ميل المماس $= \frac{6 - 2}{3} = 2$ و عليه فإن

(62)

$$2 - 10 - 24 = -22$$

$$0 = (4 - v)(4 + 3v) \Rightarrow 0 = 4 - v + 12v - 3v^2$$

$$, \frac{145}{24} = v \text{ ونعوضه في معادلة المنحنى } 12 - v = 12 - \frac{145}{24} = \frac{149}{24}$$

$$, 1 = v \text{ ونعوضه في معادلة المنحنى } 12 - v = 12 - 1 = 11$$

$$0 = 5 - v + 3v^2 \text{ موازاة المستقيم } (12 - 5 = 7)$$

$$\text{عند التقاطع: } (12 - 5 = 7), \left(\frac{145}{24}, \frac{4}{3}\right)$$

تعاريف

64

$$\frac{e}{2(s-1)} = \frac{(s+1)(1) - (s-1)(1)}{2(s-1)} = \frac{0}{2} : \text{إكل}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{e}{4} = \frac{e}{2(1-1)} = \frac{e}{2(s-1)} = (0, 1-) \text{ ميل المماس عند النقطة}$$

مثال 4 اوجد معادلة المماس للمنحنى:

$$s = \frac{3-s-2}{2+3} \text{ عند النقطة } s=5$$

$$\text{إكل: عندما } s=5 \text{ فإن } \frac{3-s-2}{2+3} = 5 : 1- = s \text{ لـ } \frac{3-s-2}{2+3}$$

$$\frac{13}{2(2+3)} = \frac{(3-s-2)3 - (2+3)2}{2(2+3)} = \frac{0}{2} :$$

$$13 = \frac{13}{2(2+3)} \text{ ميل المماس للمنحنى عند النقطة } (5, 1-)$$

$$\text{لـ معادلة المماس } 13 = \frac{s-5}{1+s}$$

$$0 = 18 - s - 13 - s \text{ وهو}$$

مثال 5 اوجد النقطة الواقعة على المنحنى $\frac{e}{2+s} = 0$ والتي

يصنع المماس عند زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

إكل: المماس يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات
 ميل المماس $= \tan \frac{\pi}{4} = 1 = \frac{e}{2+s}$

$$\frac{4}{2(2+s)} = \frac{(2-s)(1) - (2+s)(1)}{2(2+s)} = \frac{0}{2} :$$

$$\frac{4}{2(2+s)} = \frac{e}{2(2+s)} \text{ ميل المماس للمنحنى عند النقطة على المنحنى}$$

$$4 = e \text{ لـ } 2+s \text{ لـ } 2 \pm = 2+s \text{ لـ } 4 = (2+s) \text{ لـ } 1 = \frac{4}{2(2+s)}$$

$$1- = \frac{e-0}{2+0} = 0 \text{ ومنها } 0 = 2-2 = s \text{ ومنها } 4 = 2-2 = s$$

$$3 = \frac{6-s}{2} = \frac{e-4}{2+4} = 0$$

المماس للمنحنى يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ عند النقطتين $(0, 1-)$ و $(3, 4-)$

(65)

مثال 18 إذا كان المنحنى $\frac{p}{s+b} = 0$ ويمر بالنقطة $(2, 1)$ والكمية المنحنى عند هذه النقطة يوزن المستقيم $s + 3 = 0$ فاحد قيمتي p و b .

الحل: المنحنى $\frac{p}{s+b} = 0$ ويمر بالنقطة $(2, 1)$

$$\textcircled{1} (b+1)2 = p \quad \therefore \quad \frac{p}{b+1} = 2$$

$$\frac{p}{(b+1)} = \frac{(1)(1) - (b+1)(0)}{2(b+1)} = \frac{1}{2(b+1)}$$

$$\therefore \frac{p}{2(b+1)} = 1 \Rightarrow \frac{p}{2} = 2(b+1)$$

بمبدأ الكميات المنحنى عند النقطة $(2, 1)$ $\frac{1}{2(b+1)} = (2, 1)$

الكمية يوزن المستقيم $s + 3 = 0$ ميل الكمية $-1 =$

$$\textcircled{2} 1 \neq b \quad \therefore \quad 1 = \frac{p}{2(b+1)} \quad \therefore \quad 1 = \frac{p}{2(b+1)}$$

إذا عوضنا عن قيمة p من $\textcircled{1}$ في $\textcircled{2}$

$$1 = \frac{(b+1)2}{2(b+1)}$$

$$1 = \frac{2}{(b+1)} \quad \therefore \quad 2 = b+1 \quad \therefore \quad b = 1$$

وبموضع $\textcircled{1}$ نجد: $p = (3+1)2 = 8$

تكملة

67

مثال : أوجد المشتقة الأولى لكل هيايت :

$$(1 + \sqrt{x})^4 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} (1 + \sqrt{x})^4 = \frac{0}{1} \quad \text{اكت}$$

$$3(1 + \sqrt{x})^3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$$

$$\frac{3(1 + \sqrt{x})^3}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{0}{2} \quad \text{اكت} \quad \frac{3}{2} \left(\frac{1 + \sqrt{x}}{2} \right) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{3}{2(1 + \sqrt{x})} \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{15}{2(1 + \sqrt{x})} \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{1}{2} (4 - \sqrt{x} - \frac{1}{2}) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} (4 - \sqrt{x} - \frac{1}{2}) = 0 \quad \text{اكت}$$

$$(3 - \sqrt{x})^{\frac{1}{2}} (4 - \sqrt{x} - \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\frac{(3 - \sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}{4 - \sqrt{x} - \frac{1}{2}} = 0$$

مثال : أوجد المشتقة الأولى لكل هيايت :

$$(1 + \sqrt{x})^3 (2 - \sqrt{x})^3 (1 + \sqrt{x})^3 = 0 \quad (4)$$

$$\frac{d}{dx} (1 + \sqrt{x})^3 (2 - \sqrt{x})^3 (1 + \sqrt{x})^3 = \frac{0}{1} \quad \text{اكت}$$

$$3(1 + \sqrt{x})^2 (2 - \sqrt{x})^3 (1 + \sqrt{x})^3 + 3(1 + \sqrt{x})^3 (2 - \sqrt{x})^2 (1 + \sqrt{x})^3 = 0$$

$$(1 + \sqrt{x})^2 (2 - \sqrt{x})^3 (1 + \sqrt{x})^3 + (1 + \sqrt{x})^3 (2 - \sqrt{x})^2 (1 + \sqrt{x})^3 = 0$$

$$(2 + \sqrt{x} + 4 + 2 - \sqrt{x}) (2 - \sqrt{x})^2 (1 + \sqrt{x})^3 = 0$$

$$(7)^2 (2 - \sqrt{x})^2 (1 + \sqrt{x})^3 = 0$$

$$2(2 - \sqrt{x})^2 (1 + \sqrt{x})^3 = 0$$

68

$$\frac{3(1+\frac{e}{2})}{2(3-\frac{e}{2})} = 0$$

$$\frac{3(1+\frac{e}{2}) \times 2 \times (3-\frac{e}{2}) \times 2 - (3-\frac{e}{2}) \times 2 \times 2 \times (1+\frac{e}{2}) \times 3}{2(2(3-\frac{e}{2}))} = \frac{0}{2} \text{ لكل}$$

$$\frac{3(1+\frac{e}{2})(3-\frac{e}{2}) \times 4 - (3-\frac{e}{2})^2(1+\frac{e}{2}) \times 6}{4(3-\frac{e}{2})} =$$

$$\frac{(1+\frac{e}{2}) \times 2 - (3-\frac{e}{2}) \times 3}{4(3-\frac{e}{2})} \times (3-\frac{e}{2})^2(1+\frac{e}{2}) \times 2 =$$

$$\frac{2 - \frac{e}{2} \times 2 - 9 + \frac{e}{2} \times 6}{4(3-\frac{e}{2})} \times (1+\frac{e}{2}) \times 2 =$$

$$\frac{(2 - 2 - 9 + 3e)}{2(3-\frac{e}{2})} \times (1+\frac{e}{2}) \times 2 =$$

لا حل

$$(س) \text{ اذا كانت } \sqrt{3-\frac{e}{2}} = 0 \text{ فانه } \frac{0}{0} \text{ فانه } \frac{1}{(س) \times 2} = \frac{0}{0}$$

بمعنى: مشتقة الجذر التربيعي
لذا $\frac{1}{2\sqrt{3-\frac{e}{2}}} \times \text{مشتقة الدالة تحت الجذر التربيعي}$

مثال: اوجد $\frac{0}{0}$ لكل $3-\frac{e}{2}$

$$2 \times \frac{1}{3+\frac{e}{2}} = \frac{0}{0} \text{ لكل } (1) \quad \frac{0}{3+\frac{e}{2}} = 0$$

$$\frac{1}{3+\frac{e}{2}} =$$

$$(2) \quad \frac{1}{1+8+\frac{e}{2}-5} = 0 \text{ لكل}$$

$$\frac{8+\frac{e}{2}-5}{1+8+\frac{e}{2}-5} = \frac{0}{0}$$

B - التمثيل البياني لمتسلسلة إحصائية :

1 - الميزة الكمية :

a) المخطط العنقودي :

نحصل على المخطط العنقودي برسم أعمدة في معلم $(0, \bar{1}, \bar{j})$ تنطلق من القيم x_i و يتناسب طولها مع الحصيصة n_i .

مثال :

الوضعية رقم 1 (السؤال 1).

b) مضلع الحصائص :

نحصل على مضلع الحصائص بربط النقاط (x_i, n_i) بخطوط مستقيمة.

مثال :

الوضعية رقم 1 (السؤال 2).

c) مضلع الحصائص المتراكمة :

نحصل على مضلع الحصائص المتراكمة المتزايدة بربط $(x_i, N_i \uparrow)$ بخطوط مستقيمة.

نحصل على مضلع الحصائص المتراكمة المتناقصة بربط النقاط $(x_i, N_i \downarrow)$ بخطوط مستقيمة.

مثال :

الوضعية 1 : (السؤال 2).

d) مضلع الترددات :

نحصل عليه بربط النقاط (x_i, f_i) بخطوط مستقيمة.

مثال :

الوضعية 1 (السؤال 3).

e) مضلع الترددات المتزايدة و المتناقصة :

نحصل على مضلع الترددات المتراكمة المتزايدة بربط النقاط $(x_i, F_i \uparrow)$ بخطوط مستقيمة.

نحصل على مضلع الترددات المتراكمة المتناقصة بربط النقاط $(x_i, F_i \downarrow)$ بخطوط مستقيمة.

(f) مدرج الحصائص :

نقوم برسمه لتمثيل سلسلة إحصائية متصلة و هو عبارة عن مستطيلات تحتها تصوي سعة الصنف و طولها يناسب الحصيصة.

ملاحظة :

في حالة المتسلسلة المتصلة فإنه يتم رسم مضلع الحصائص والترددات بنفس الطريقة لسبقة باعتبار القيم x_i منتصف الصنف : $[a_i, b_i]$ ، $x_i = \frac{a_i + b_i}{2}$

2 • الميزة الكيفية :

(a) مخطط الأشرطة :

نحصل عليه برسم مستطيلات متناسبة مع الحصيصة n_i .

مثال :

الوضعية 3 (السؤال 2).

(b) المخطط النصف الدائري :

نحصل عليه بتقسيم نصف دائرة إلى قطع زاوية متناسبة مع الحصيصة n_i .

مثال :

الوضعية 3 (السؤال 3).

C- معايير الوضع :

I • المنوال :

(a) تعريف :

القيمة التي تملك أكبر حصيصة لهذه الميزة.

(b) مثال :

الوضعية I السؤال 4.

ملاحظات :

(1) في حالة متسلسلة متصلة نتكلم عن الصنف المتوالي و هو الصنف المقابل لأكبر حصيصة.

(2) يمكن الحصول على عدة منوالاات للمتسلسلة الإحصائية الواحدة.

2 • الوسط :

(a) تعريف : الوسط هو العدد :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} = \sum_{i=1}^n n_i x_i = \frac{\sum_{i=1}^n n_i x_i}{\sum_{i=1}^n n_i}$$

(b) مثال :

وضعية 1 (السؤال 4).

(c) خواص الوسط :

* ليكن N الحصيد الكلي :

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{N} n_i x_i = \sum_{i=1}^n \frac{n_i x_i}{N} = \sum_{i=1}^n f_i x_i$$

* يبقى الوسط ثابتا إذا قمنا بتغيير ترتيب القيم x_i .و كما يبقى ثابتا إذا ضربنا الحصائص n_i بنفس العدد (لا صفري).

* إذا جزأنا الساكنة إلى متسلسلتين احصائيتين بحيث :

 $\bar{x}_1$ هو وسط الساكنة التي حصيصها الكلي هو N_1 . $\bar{x}_2$ هو وسط الساكنة التي حصيصها الكلي هو N_2 .و لتكن $\bar{x}$ وسط المتسلسلة الحسابية الأصلية:

$$\bar{x} = \frac{N_1 \bar{x}_1 + N_2 \bar{x}_2}{N_1 + N_2}$$

* ليكن (t_i, n_i) متسلسلة إحصائية حيث : $t_i = ax_i + b$ و a, b عددين حقيقيين.الوسط الحسابي لـ $(t_i, n_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ هو : $\bar{t} = a\bar{x} + b$.

و نستعين بهذه الخاصية من أجل تبسيط حساب الوسط وذلك عندما تكون القيم كبيرة جدا.

3. • المتوسط :

تسمى متوسط متسلسلة إحصائية قيم ميزتها مرتبة كل عدد حقيقي M بحيث أن حصيص القيم التي أقل تماماً من M و حصيص القيم التي أكبر تماماً من M لا يتجاوز في أي منهما نصف الحصيص الكلي N .

طرق عملية لحساب المتوسط :

(a) في حالة الميزة المنقطعة :

n^* فردي : M هي القيمة المقابلة لـ $\frac{n+1}{2}$.

مثال 1 :

$M = 6$ ، 4 ، 4 ، 6 ، 9 ، 12

مثال 2 :

$M = 7$ ، 7 ، 7 ، 7 ، 7 ، 8

n^* زوجي : M توجد بين القيمة التي تقابل $\frac{n}{2}$ و القيمة التي تقابل $\frac{n}{2} + 1$.

مثال :

4 ، 5 ، 6 ، 9 ، 12 ، 15

فإن كل قيمة من المجال $[6,9]$ هي متوسط و في الغالب نقول إن :

$$M = \frac{6+9}{2} = 7,5$$

(b) في حالة القيم مجمعة في أصناف (ميزة متصلة) :

نستعمل في هذه الحالة الحصائص المتراكمة (مثلاً الحصائص المتراكمة المتزايدة).

مثال :

لدينا مجموعة من التلاميذ تتراوح أعمارهم ما بين ثمان سنوات و ستة عشر سنة كما يوضح

الجدول التالي توزيعهم حسب أربعة فصول سعة الواحد سنتين :

$I(a_i, b_i)$	$I(8, 10)$	$I(10, 12)$	$I(12, 14)$	$I(14, 16)$
n_i	16	20	14	6
C_i	9	11	13	15

n_i : الحصيصة.

C_i : مركز الفصل

$$C_i = \frac{a_i + b_i}{2}$$

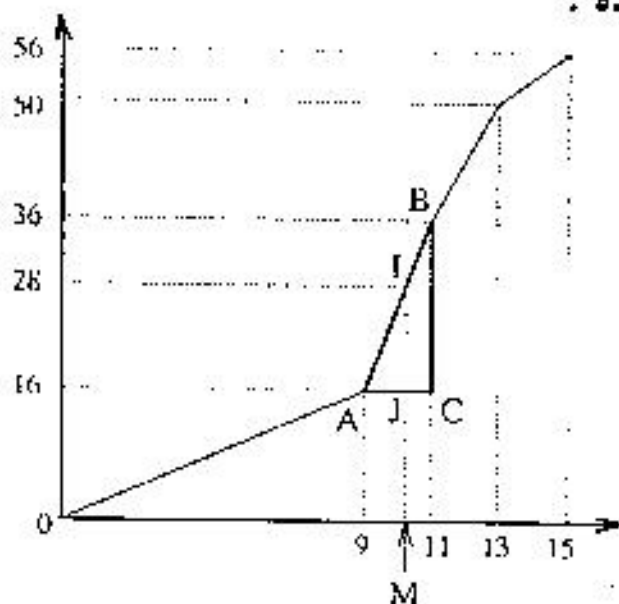
الحصيصة الكلي N يساوي 56 (إذن $\frac{N}{2} = 28$).

$$N = 56 \Leftrightarrow \frac{N}{2} = 28$$

الموسم M يحقق :

28 تلميذا تريد أعمارهم على M سنة و 28 تلميذا نقل أعمارهم عن M سنة.

مضلع الحصائص المتراكمة المتزايدة :



إذا افترضنا أن مضلع الحصائص المتراكمة يشكل من قطع مستقيمة فإنه يمكن تطبيق مبرهنة طاليس.

$$\frac{AJ}{AC} = \frac{JI}{CB} \Rightarrow \frac{M-9}{11-9} = \frac{28-16}{36-16} \Rightarrow M = 10.2$$

إذن الموسم يساوي 10 سنوات و شهرين و 12 يوما.

تطبيق :

في المتسلسلة الإحصائية السابقة نقوم بتجميع قيمها في أصناف سعتها أربعة سنوات.

اتبع الخطوات السابقة لحساب الموسم. ماذا تلاحظ ؟

76

D - معايير التشتت :

1 • وضعية

نعتبر متسلسلة النقاط التالية لساكنة تتألف من 17 نتيجة لمجموعة الطلاب.

المتسلسلة A :

14 13 13 12 12 12 11 11 11 11 11 10 10 10 9 9 8

المتسلسلة B :

20 17 17 15 14 14 12 11 11 11 10 8 8 7 5 5 2

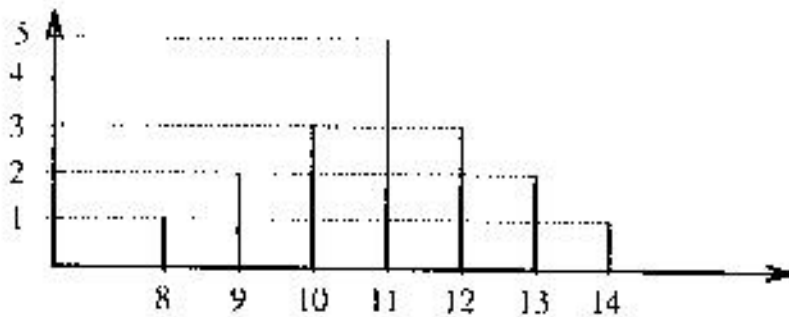
(1) مثل بيانيا هاتين المتسلسلتين A و B.

(2) حدد الإنفرانج المتوسط و المتغيرة و الإنفرانج الطرازي.

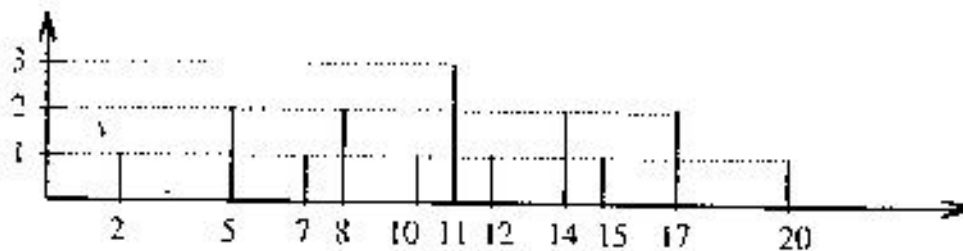
(3) قارن تشتت المتسلسلتين.

الحل :

تمثيل A :



تمثيل B :



المتسلسلة A :

لنكمل الجدول :

x_i	8	9	10	11	12	13	14
n_i	1	2	3	5	3	2	1

و لنحسب الوسط :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n n_i x_i$$

$$\bar{x} = \frac{1}{17} (8 \times 1 + 2 \times 9 + 3 \times 10 + 5 \times 11 + 3 \times 12 + 2 \times 13 + 1 \times 14)$$

$$\bar{x} = \frac{187}{17} = 11$$

بمقارنة قيم هذه المتسلسلة بالوسط $\bar{x}$ تحصل على متسلسلة جديدة تعبر عن مدى انفراج هذه القيم مع الوسط $\bar{x}$.

تعبّر هذه المتسلسلة عن تشتت القيم x_i حول الوسط $\bar{x}$ حسب الجدول التالي :

$ x_i - \bar{x} = X_i$	0	1	2	3
x_i	5	6	4	2
$(x_i - \bar{x})^2$	0	1	4	9

لنحسب معدل هذه المتسلسلة :

$$e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i |x_i - \bar{x}|$$

حيث p هو عدد عناصر السلسلة الإحصائية :

$$e = \frac{1}{17} (0 \times 5 + 6 \times 1 + 4 \times 2 + 2 \times 3)$$

$$= \frac{1}{17} (6 + 8 + 6) = \frac{20}{17} \approx 0,06$$

يسمى هذا المقدار الإنفراج المتوسط وهو من أهم معايير التشتت بالنسبة لكل متسلسلة.

كل ما كان هذا المقدار صغيرا كلما كان التشتت خفيفا.

هكذا نسمى المغايرة المقدار $\mathcal{V}$ التالي :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i (x_i - \bar{x})^2 = 2,35$$

$$e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i |x_i - \bar{x}|$$

76

المتسلسلة B :

x_i	2	5	7	8	10	11	12	14	15	17	20
n_i	1	2	1	2	1	3	1	2	1	2	1

$$\bar{x} = \frac{1}{17}(1 \times 2 + 2 \times 5 + 1 \times 7 + 2 \times 8 + 1 \times 10 + 3 \times 11 + 1 \times 12 + 2 \times 14 + 1 \times 15 + 2 \times 17 + 1 \times 20)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{17}(2 + 10 + 7 + 16 + 10 + 33 + 12 + 28 + 15 + 34 + 20)$$

$$\bar{x} = \frac{187}{17} \Rightarrow \bar{x} = 11$$

بنفس الطريقة السابقة نحصل على الجدول التالي :

$X_i = x_i - \bar{x}$	0	1	3	4	6	7
X_i^2	0	1	9	16	36	81
n_i	3	2	4	2	4	2

نحسب وسط هذه المتسلسلة (2) :

$$e' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n n_i |x_i - \bar{x}|$$

$$e' = \frac{1}{17}[0 \times 3 + 1 \times 2 + 4 \times 2 + 6 \times 4 + 9 \times 2]$$

$$e' = \frac{64}{17} \Rightarrow e' = 3,76$$

المغايرة V :

$$V = \frac{1}{N} \sum n_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$V = \frac{1}{17}[3 \times 0 + 2 \times 1 + 4 \times 9 + 2 \times 16 + 4 \times 36 + 2 \times 81]$$

$$V = \frac{1}{17} \Leftrightarrow V = \frac{376}{17}$$

الإنفراج الطرازي هو الجذر التربيعي للمغايرة V :

إذن :

$$\sigma_1 = \sqrt{2,35} = 1,53 \quad \text{في الحالة A}$$

$$\sigma_2 = \sqrt{22,11} = 4,7 \quad \text{في الحالة B}$$

(3) المتسلسلة B أكثر تشتتاً من المتسلسلة A لأنها تملك انفراجاً طرازياً أكبر وهذا متوقع لأنه كلما تباعدت القيم عن الوسط كبرت المقادير $(x_i - \bar{x})^2$ وبالتالي ترتفع المغايرة والإنفراج الطرازي.

2 • الإنفراج المتوسط المطلق :

(a) تعريف :

الإنفراج المتوسط المطلق هو وسط المتسلسلة ونرمز بـ e :

$$e = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^p n_i x_i - x \right), \quad 1 \leq p \leq N$$

(حيث p هو عدد عناصر السلسلة).

(b) مثال :

في المتسلسلة A المعرفة في الوضعية السابقة حصلنا على الإنفراج المتوسط المطلق وهو $e = 0,06$:

(3) المغايرة :

(a) تعريف :

المغايرة هي وسط المتسلسلة $\left(n_i, |x_i - \bar{x}|^2 \right)$ ونرمز له بـ V :

$$V = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^p n_i (x_i - \bar{x})^2 \right)$$

(b) مثال :

في نفس الوضعية (الجزء A). وجدنا أن $V = 2,35$.

* ملاحظة 1 : المتغيرة V عدد موجب دائما ($V \geq 0$)

$$V = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^p n_i (\hat{x}_i - \bar{x})^2 \right) \quad \text{* ملاحظة 2 : لدينا :}$$

$$V = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^p n_i (x_i^2 - 2x_i \bar{x} + \bar{x}^2) \right)$$

$$V = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^p n_i x_i^2 \right) - \frac{2\bar{x}}{N} \left(\sum_{i=1}^p n_i x_i \right) + \frac{N}{N} \bar{x}^2$$

$$V = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^p n_i x_i^2 \right) - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^p n_i x_i^2 \right) - \bar{x}^2$$

$$V = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i x_i^2 \right) - \bar{x}^2$$

إذن المتغيرة تساوي وسط المتسلسلة (x_i, n_i) ناقص مربع الوسط.

* الملاحظة 3 :

إذا درسنا مثلا ميزة القامة بالمستمر لأفراد ساكنة إحصائية ما فإن المتغيرة يعبر عنها بالسنتيمتر المربع وهذا لايفيد من الناحية العملية وعليه فإننا نلجأ إلى حساب الجذر التربيعي للمتغيرة :

$$\sigma = \sqrt{V}$$

3. • الإنفراج الطرازي :

(a) تعريف :

الإنفراج الطرازي هو الجذر التربيعي للمتغيرة V وترمز له بـ $\sigma : \sigma = \sqrt{V}$

(b) مثال :

في الوضعية السابقة (الجزء A) : $\sigma = 1.53$

برنامج حساب الوسط والإنفراج الطرازي على الآلة الحاسبة TI - 62.

نذكر أن :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right) - \bar{x}^2}$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N}$$

* الذاكرات المستخدمة :

- الذاكرة 0 لمجموع القيم x_i .
- الذاكرة 1 لمجموع مربعات $\sum x_i^2$
- الذاكرة 2 للحصيص الكلي N .

* البرامج الجزئية :

- برنامج جزئي أول لإدخال القيم x_i ومربعاتها x_i^2 والحصيص الكلي.
- برنامج جزئي ثاني لحساب الوسط.
- برنامج جزئي ثالث لحساب الانحراف المعياري.

تفريغ الذاكرات.	←	2 nd CM
الدخول في النمط البرمجي.	←	LRN
محو البرامج السابقة.	←	2 nd CM
افتتاح برنامج جزئي جديد.	←	LBL0
إدخال القيم x_i .	←	R/S
إضافة x_i إلى محتوى الذاكرة 0.	←	ST0 + 0
تربيع x_i .	←	x^2
إضافة x_i^2 إلى محتوى الذاكرة 1.	←	ST0 + 1
استعراض محتوى الذاكرة 1.	←	1
إضافته إلى محتوى الذاكرة 2.	←	ST0 + 2
استخراج محتوى الذاكرة 2.	←	RCL

عودة إلى بداية البرنامج الجزئي الأول.	←	Go To 0
افتتاح برنامج جزئي ثلثي.	←	LBL ₃
استخراج محتوى الذاكرة 0.	←	RCL 0
قسمة على.	←	÷
استخراج محتوى الذاكرة 2.	←	RCL ₂
استعراض النتيجة.	←	=
اختتام البرنامج الجزئي الثاني.	←	R/S
افتتاح برنامج جزئي ثالث.	←	LBL ₃
استعراض محتوى الذاكرة 1.	←	RCL ₂
قسمة على.	←	÷
استعراض محتوى الذاكرة 2.	←	RCL 2
طرح ما يلي.	←	-
فتح قوس.	←	(
استعراض محتوى الذاكرة 0.	←	RCL 0
قسمة على.	←	÷
استعراض محتوى الذاكرة 2.	←	RCL ₂
إغلاق القوس.	←	)
تربيع ما بين قوسين.	←	2 nd x ²
استعراض الناتج.	←	=
استخراج جذره.	←	√x
استعراض الناتج النهائي.	←	=
اختتام البرنامج الجزئي الثالث.	←	R/S
الرجوع إلى بداية البرنامج.	←	RST
الخروج من النمط البرمجي.	←	LRN

للتنفيذ :

RST ← وضع في بداية البرنامج.

R/S ← بإدخال القيم.

نطبق هذا البرنامج على المتسلسلة A في الوضعية 1 السابقة لحساب الوسط، والإنفراج الطرازي.

10 R/S 10 R/S 10 R/S 9 R/S 9 R/S 8
 R/S 12 R/S 12 R/S 11 R/S 11 R/S 11 R/S 11
 R/S 14 R/S 13 R/S 13 R/S 12

نقرأ على الشاشة الحصيصة الكلي : 17

لحساب الوسط $\bar{x}$:

GoTo 1 ← العودة إلى البرنامج الجزئي الثاني.

R/S ← طلب قيمة الوسط : $\bar{x} = 11$ لحساب الإنفراج الطرازي σ نضغط على R/S (أو وضع 2 GoT R/S) نجد : σ .

IV - تمارين

تمرين 1 :

أنجز تلاميذ الثالثة (1) والثالثة (2) اختبارا في الرياضيات.

ولكي يقارن الأستاذ بين مستوى القسمين صنف التلاميذ حسب النقاط التي حصلوا عليها. فكانت

نتائج الثالثة (1) وفق ما هو مبين في الجدول التالي :

النقاط	3	5	7	8	10	12	15	18
عدد التلاميذ	2	6	8	14	4	3	2	1

وكانت نتائج الثالثة (2) وفق ما هو مبين في الجدول التالي :

النقاط	3	5	7	8	10	12	15	18
عدد التلاميذ	3	8	6	10	8	1	1	2

(1) كم عدد التلاميذ في كل قسم ؟

- (2) ما هو وسط النقط في كل قسم ؟
 (3) أحسب ترددات الميزة في كل جدول.
 (4) أنشئ ماضع الحصائص في كل جدول وذلك بالنسبة لنفس الأستد.
 (5) أنشئ ماضع الترددات في كل جدول وذلك بالنسبة لنفس الأستد.
 (6) ماهي النسبة المئوية للتلاميذ الذين حصلوا على نقطة تفوق 10 في كل من القسمين ؟
 القسمين يملك مستوى أحسن ؟
 تمرين 2 :

يقوم معمل بتفقيف التفاح قصد بيعه وقبل ذلك يصنف التفاح حسب قطره مستعملا المقاييس التالية:

80mm 75mm 70mm 65mm 60mm 55mm

وكانت أقطار التفاح بالمليمتر كما يلي :

69 61 64 58 50 57 68 78 62 79 76 56 52

68 66 62 57 72 72 61 63 73 63 56 74 71

83 77 63 49 82 77 51 66 78 67 61 59 79

72 77 66 64 72 57 87 67 50 61 58

(1) كم هي الأقطار التي يقل قياسها عن 55mm ؟

كم هي الأقطار التي يفوق قياسها 80mm ؟

(2) رتب هذه المقاييس تصاعديا.

أتمم الجدول التالي :

أقطار	55 ≤ ... < 60	60 ≤ ... < 65	65 ≤ ... < 70	70 ≤ ... < 75	75 ≤ ... < 80	80 ≤ ... < 85	85 ≤ ... < 90
الخصيص							
الترددات							

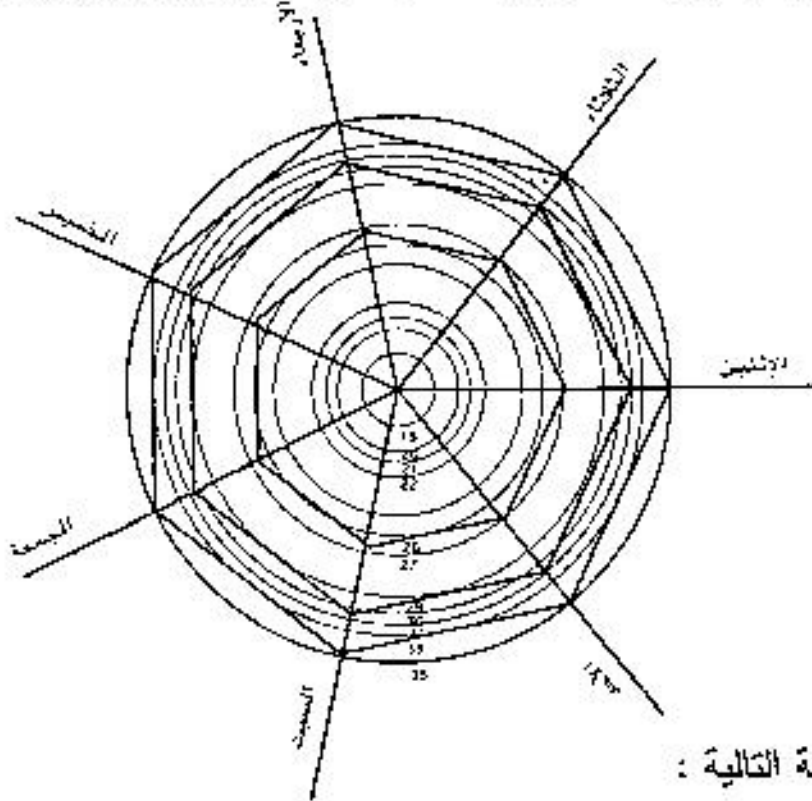
(a) أنشئ مدراج الحصائص ومدراج الترددات.

(b) احسب وسط الأقطار.

(c) أنشئ ماضع الخصائص وماضع الترددات.

تمرين 3 :

هذا مبيان قطبي يمثل درجات الحرارة المسجلة طيلة شهر أبريل من سنة 1986.



أجب على الأسئلة التالية :

(a) ماهي الأيام التي سجلت فيها نفس درجة الحرارة ؟

(b) كم مرة سجلت الدرجة 25 ؟

(2) رتب درجات الحرارة المسجلة ثم أتمم الجدول التالي :

الدرجة	عدد الأيام

تمرين 4 :

مسابقة تتضمن ثلاثة مواد : اللغة العربية (عاملها 3) الفرنسية (عاملها 2) والرياضيات (عاملها 2).

حصلت مجموعة من خمسة مترشحين على النتائج التالية :

رقم المترشح	1	2	3	4	5
الدرجة في العربية	12	8	9	10	10
الدرجة في الرياضيات	15	9	12	9	7
الدرجة في الفرنسية	11	6	10	14	6

احسب بطريقتين مختلفتين المعدل العام لهذه المجموعة.

تمرين 5 :

بعد إجراء دراسة على 72 شخصا تم الكشف عن عدد الأسنان قسمة ذي كز شخص حسب

الجدول التالي :

24	27	27	30	22	24	24	22	32	27	24	17	29	27	24
	21	27	22	29	24	29	27	22	29	24	27	22	27	29
	27	22	27	24	22	22	24	27	30	21	22	22	24	29
24	22	29	24	27	29	30	24	22	27	30	22	24	27	27
	27	22	30	24	27	29	27	24	29	29	17	27	24	27

(1) اعط الجدول الإحصائي (الحصيص - التردد - التردد المتراكم).

(2) أرسم المخطط العنقودي.

(3) حدد بالنسبة المئوية التي لديها على الأقل 27 سن سليمة.

تمرين 6 :

كشف لعدد الأيام المغيرة في انواكشوط خلال السنوات العشرة الماضية :

السنة	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
الأيام المغيرة	33	45	53	85	79	82	77	67	60	60

وتتوزع هذه الأيام على الأشهر حسب الجدول التالي :

الشهر	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليوز	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
عدد الأيام	108	83	76	66	70	47	19	19	30	26	22	75

(1) أرسم المخطط العنقودي والمخطط القطبي.

(2) ماهي الأشهر المناسبة لزيارة انواكشوط بالنسبة للسائح.

نعطي المتسلسلة الإحصائية التالية :

الفصل	الخصائص	الخصائص المتراكمة
$[0, 20[$	12	12
$[20, 40[$	21	33
$[40, 60[$	39	72
$[60, 80[$	12	84
$[80, 100[$	9	93
$[100, 120[$	7	100

(1) مثل على التوالي :

(a) مندرج الخصائص.

(b) مضلع الخصائص.

(c) مضلع الخصائص المتراكمة المتزايدة.

(2) حدد الصنف المنوالي والوسط.

(3) احسب الوسط.

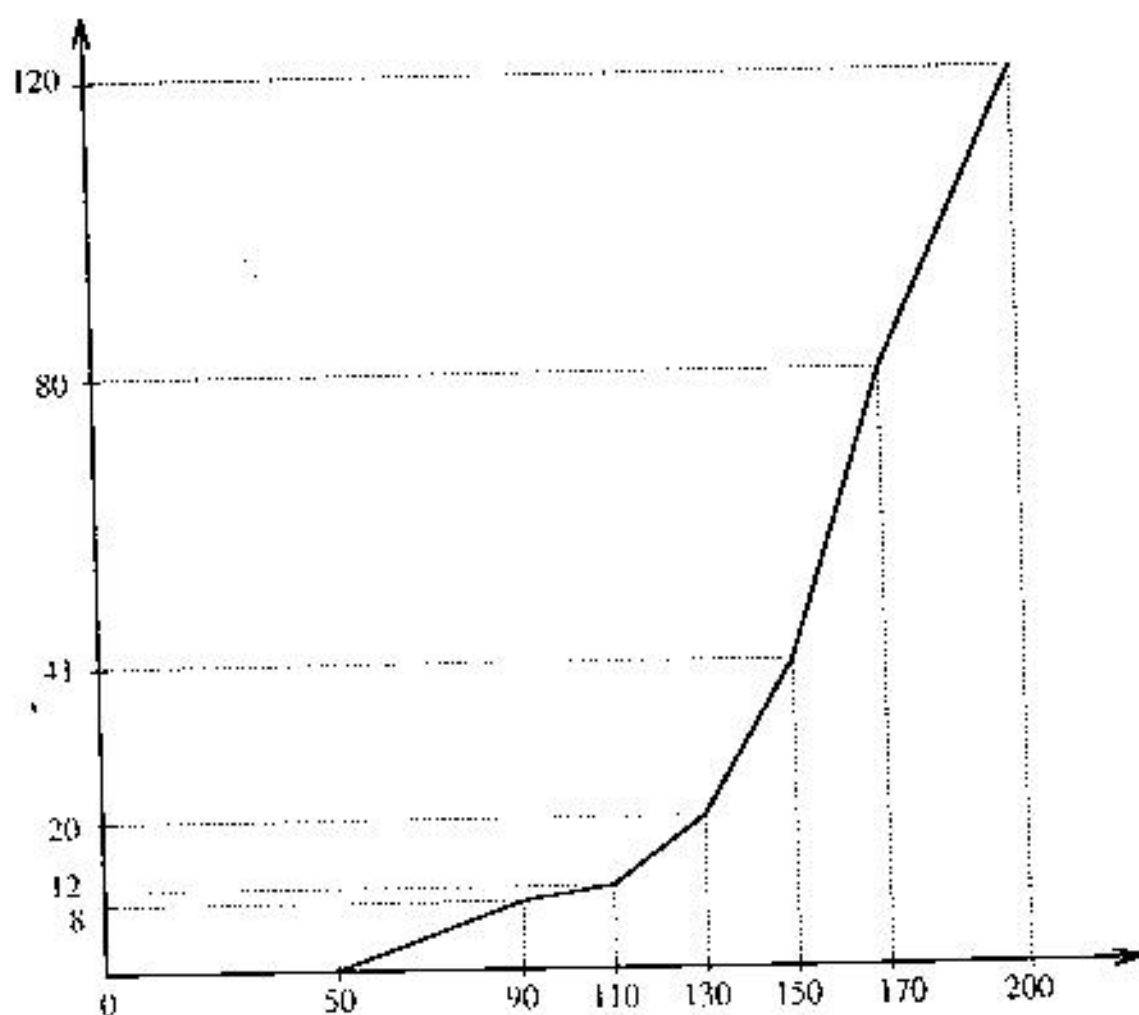
تمرين 8 :

الجدول التالي يمثل عدد نبضات القلب لثمانين شخصا في الدقيقة.

87	66	71	76	91	79	71	68	72	81	76	86	73	78	72
72	74	79	67	67	77	81	79	83	68	73	71	69	94	83
76	93	69	82	74	71	67	84	72	84	66	87	76	77	94
72	73	78	92	71	84	73	73	81	79	83	72	73	88	89
88	82	74	86	79	74	88	77	78	71	74	86	74	82	72
										73	87	69	91	68

- (1) أحسب وسط هذه المتسلسلة و كنته مغيرتي.
 - (2) أحسب وسط ومغايرة المتسلسلة الناتجة عن تجميع المتسلسلة لسبعة إلى صنفين : وحدات (نبضات).
 - (3) نفس السؤال السابق ولكن بعد تجميع المتسلسلة في أصناف سبعة (1، 2، 3، 4، 5، 6، 7) وحدات.
 - (4) قارن النتائج المحصل عليها في الحالتين.
- تمرين 9 :

في نهاية العمل اليومي لاحظت محاسبة بالصندوق في البنك أن 120 صكا التي أحيتت ببيع يمثلها مضلع الحصائص المتراكمة التالي :



حدد المتوسط لهذه المتسلسلة.

برنامج العنة الثالثة

العوامل الحدودية - حل الحدوديات عن طريق الدلتا - جمع وطرح الكسور الدبرية

حل المعادلات من الدرجة الثانية والمتباينات وخواصها بمتغيرين

المتباينات / الخطية / بمتغير واحد وبمتغيرين

الحلول الجبرية والرسوم البيانية للمعادلات والمتباينات

اللوغاريتم

الدالة خطية - التعريف - الخواص - التمثيل البياني

تكملة المتواليات الحسابية والعددية دراسة تكميلية للمتواليات

التفاضل والتكامل - التكاملات الوظيفية

حساب المساحات

تكملة الدروس في الإحصاء

في النهاية التلميذ يكون قادراً على استعمال الآلة الحاسبة