

جمهورية السنغال
وزارة التربية الوطنية
التعليم العربي الاسلامي

مذكرة الرياضيات للسنة الثانية الثانوية

لجنة السهر
على التعليم العربي الاسلامي

برنامج السنة الثانية

الحدوديات

- 1- معادلة الدرجة الثانية
- 2- المتباينات من الدرجة الثانية
- 3- حل أنظمة من المتباينات

Δ - الكسور الجبرية

- 1- جمع يسير الكسور
- 2- طرح يسير الكسور
- 3- ضرب يسير الكسور
- 4- المقهوفات

- 1- المقهوفات المتساوية
- 2- المقهوفات المتماثلة
- 3- المقهوفات المتماثلة

I. معادلات الدرجة الثانية

1-1 - حدوديات الدرجة الثانية:

مقدمة:

نشرثم بسط ورتب الحدوديات التالية:

$$ح(س) = (س - 3)(س - 4)(س + 2)$$

$$غ(س) = (س - 1)^2 - 25$$

$$ر(س) = 3 \left[\left(\frac{1}{3} - س \right)^2 - \frac{16}{9} \right]$$

1-2 تعريف:

إذا كان $س$ متغير حقيقي:

حدود مبسطة على صورة $ح(س) = أ^2 + ب^2 + (س \neq 0)$ تسمى حدودية درجة ثانية.

مفردات:

- عامل الحد ذي الدرجة الثانية هو $أ$.
- عامل الحد ذي الدرجة الأولى هو $ب$.
- عامل الحد ذي الدرجة الصفر هو $ح$.

مثال:

ح(س) = $3س^2 - 10س + 7$	غ(س) = $س^2 + 4س + 7$	ر(س) = $س^2 - 9س + 4$
3	1	1-
0	4	5
10	7	0

1-3 - حدودية الدرجة الثانية في صورة مربع كامل:

لدينا الحدودية التالية في صورة: $ح(س) = 3س^2 - 6س + 4$

المطلوب:

(4)
تحقق من صحة التساوي: $3 = (s) [7 + (1-s)^2]$
أكمل مختلف الخطوات الحسابية المؤدية إلى هذه النتيجة:

$$3 - s^2 - 6s - 6s - 24 = [s^2 \times \square \times \square]$$

$$= [8 + (s)^2]$$

$$= [s^2 + (1+s)]$$

مفردات: كل حدودية (s) $= s^2 + s + 1$ حيث $s \neq 0$
يمكن كتابتها على صورة:

$$(s) = [s^2 + (2+s)]$$

وتقول أننا حولنا الحدودية إلى حاصل ضرب قوسين
(أي رفعناها إلى القوة الثانية)

أمثلة: أكتب الحدوديات التالية إلى صورة مربع كامل.
لدينا: $(s) = 2 - [s^2 - \frac{5}{2}s - \frac{3}{2}]$

$$= 2 - [s^2 - \frac{5}{4}(s - \frac{5}{4}) - \frac{25}{16} - \frac{3}{2}]$$

$$= 2 - [s^2 - \frac{5}{4}(s - \frac{5}{4}) - \frac{49}{16}]$$

بنفس الطريقة السابقة نتحقق من أن الحدوديات
التالية لها صور مربع كامل.

$$17 (s) = s^2 + 4s + 5 \text{ صورتهما: } (s+2)^2 + 1$$

$$2 (s) = s^2 + 12s + 10 \text{ صورتهما: } [4 + (s+3)^2]$$

$$\text{نوات (s)} = s^2 - 4s - 1 \text{ صورتهما: } [4 - (s-2)^2]$$

كلما أننا يمكن تحويل حدودية الصورة مربع كامل
باستعمال الطريقة التالية:

$$ح(س) = P = \left[\frac{\Delta}{2P_4} - \left(\frac{C}{P_2} + س \right) \right]^2$$

علمًا بأن $\Delta = ب^2 - 4ج - 4د$

نطبق عليه المثال السابق:

$$ح(س) = 2 - 2س + 8س + 6$$

نكتب الحدودية الصورة مربع كامل،

لدينا $P = 2$ ، $ب = 8$ ، $ج = 6$ ، $\therefore \frac{C}{P_2} = \frac{6}{2} = 3$ ، $2 - 2س = 2 - 2س$

$$\Delta = ب^2 - 4ج - 4د = 8^2 - 4 \times 6 - 4 \times 2 = 112$$

$$\therefore \frac{\Delta}{2P_4} = \frac{112}{2(2-4)} = 7$$

نستنتج أن $ح(س) = 2 - 2س + 7 = 9 - 2س$

حلل الحدودية من الدرجة الثانية

أكمل الجدول التالي:

الحدودية	$س^2 - 5س + 10$	$س^2 - 6س + 3$	$2س^2 + 5س - 12$
قيمة Δ	$\Delta = -15$		
صورة المربع			$\left[2س + \frac{5}{2} - \frac{121}{16} \right]^2$
التحليل	لا يمكن تحليله		
الجذر (الحل)		لها جذر واحد $س = 3$	

لتحديد جذر الحدودية (طول الحدودية) مثل:

$$C(s) = P(s) + B(s) + J(s) \neq 0, \text{ بالإمكان:}$$

$$\Delta = B^2 - 4PJ$$

• استعمال المعطيات التالية حول قيمة Δ .

إذا كان الجذر أي الدلتا:

$\Delta > 0$ ليس لها جذر. (مثلاً)

$$\Delta = 0 \text{ لها مل وحيد وهي } P = -\frac{B}{2J}$$

$\Delta < 0$ لها جذرين (عقليين)

$$(1) \quad \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2J} \quad (2) \quad \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2J}$$

ملاحظة: إذا كان المعامل P وجب لها رموز عكسية أي
إشارات متعاكسة، إذ $\Delta < 0$ في هذه الحالة لها حلان
حينما يكون $\Delta = 0$ نحصل على حل واحد $-\frac{B}{2J}$

استخدام الجذور لتفليل الحدودية.

$$\text{ليكن } C(s) = P(s) + B(s) + J(s) \quad (P \neq 0)$$

لكتابة $C(s)$ على صورة عامل بدرجة واحدة، يمكن
أن نستخدم الجدول التالي:

الجذر	$C(s)$ لها جذر واحد	$C(s)$ لها جذرين
التفليل	لا يمكن تفليله	يمكن تفليله

أمثلة: جلاء إذا أمكن الحدوديات التالية:

$$\begin{aligned} \text{ح (س)} &= \text{س}^2 - \text{س} + 1, \quad \text{غ (س)} = \text{س}^2 - \frac{1}{2}\text{س} - 4\text{س} - 8 \\ \text{ر (س)} &= \text{س}^2 - 2\text{س} + \text{س} - 3. \end{aligned}$$

الحلول:

$$1 \quad \text{ح (س)} = \text{س}^2 - (1) = \Delta = 3 - = 4 - = 1 \quad \therefore \Delta > 0 \text{ لا يمكن تحليله.}$$

$$2 \quad \text{غ (س)} = \text{س}^2 - (4) = \Delta = 4 - (1) = 16 - 16 = 0 = \Delta$$

$$16 - 16 = 0 = \Delta$$

$$3 \quad \text{ر (س)} = \text{س}^2 - 2\text{س} + \text{س} - 3 = \text{س}^2 - \text{س} - 3 = \text{س}^2 - 4 = (\text{س} - 2)(\text{س} + 2)$$

$$\Delta = 25 = 5^2 \quad \therefore \Delta > 0 \text{ لها حلان (جذران)}$$

$$1 + = \frac{4 +}{4} = \frac{5 + 1}{4} = \frac{25 + 1}{2 \times 2} = 2 \text{ ح}$$

$$\text{ر (س)} = (\text{س} - 2)(\text{س} + 2) = (\text{س} - 2)(\text{س} + 2)$$

$$\text{ر (س)} = (\text{س} - 2)(\text{س} + 2)$$

مجموع حلول معادلة من الدرجة الثانية:

$$\begin{aligned} \text{لما كانت المعادلة لها حلان ح, غ} &= \frac{\Delta \sqrt{1} - \text{ب}}{2\text{أ}} = \frac{\Delta \sqrt{1} + \text{ب}}{2\text{أ}} = 2\text{ح} + 1, \text{ح} + 1 \\ \text{فلما نجد أن: ح, غ} &= \frac{\Delta \sqrt{1} - \text{ب}}{2\text{أ}} + \frac{\Delta \sqrt{1} + \text{ب}}{2\text{أ}} = 2\text{ح} + 1, \text{ح} + 1 \\ \text{فلما نجد أن: ح, غ} &= \frac{\Delta \sqrt{1} - \text{ب}}{2\text{أ}} + \frac{\Delta \sqrt{1} + \text{ب}}{2\text{أ}} = 2\text{ح} + 1, \text{ح} + 1 \end{aligned}$$

ملحق:

التحليل إلى مربع كامل

$$(s \pm p)^2 = s^2 \pm 2sp + p^2 \quad \text{تذكر المتطابقات}$$

$$(s - p)^2 = (s + p)(s - p)$$

لاحظ الأمثلة التالية، التحليل إلى مربع

أمثلة:

$$(s + 4)^2 = s^2 + 8s + 16$$

$$(s - 4)^2 = s^2 - 8s + 16$$

$$(s - 3)^2 = s^2 - 6s + 9$$

$$(s + 3)^2 = s^2 + 6s + 9$$

أي: $s^3 - 27 = (s - 3)(s^2 + 3s + 9)$
التحليل لفرق المكعبين، يشبه التحليل لفرق
المربعين الفرق فقط في أن الأس
كما تعرف أنه:

1- فرق المربعين يتم تحليله هكذا

$$s^2 - p^2 = (s - p)(s + p)$$

فما هي قيمة: $s^3 - p^3$ ؟

نعرف أنه $s^3 - p^3 = (s - p)(s^2 + sp + p^2)$ (مقدار آخر)
نلاحظ أنها أصبحت معادلة، بمجهول واحد وهو
المقدار الذي لا نعرفه أي القوس الثاني
بقسمة الطرفين على $(s - p)$ ماذا نلاحظ؟

$$\frac{P^3 - S^3}{P - S} = P^2 + PS + S^2 \quad (\text{المقدار الذي لا نعرفه})$$

$$\text{وعليه فلن: } \frac{P^2 + PS + S^2}{P^3 - S^3} = (P - S)$$

بهذه الطريقة يمكن إيجاد المقدار المجهول في تحليل عرق المكعبين.

نمعن حينئذ لكي لا نخطأ.

علم العموم لايجاد مجموع المكعبين أو الفرق فإننا نضع قوسين صغيرين وتضع فيه الحدود بدو تكعيب وتفتح قوسين آخرين آخريين وتضع فيه مربع الحد الأول + الحد الأول في الحد الثاني مع إشارة مخالفة + مربع الحد الأول في غير.

شرط قبول المقدار مربع كامل، كيف نعرف أنه المقدار مربع كامل يجب أنه تنطبق عليه ما يلي:

١) أنه يكون الحد الأول، والأخير موجبيين معاً أو سالبيين معاً.

٢) أنه يكون الحد الأوسط (ب) يساوي ضعف جذر الحد الأول ضرب جذر الحد الثاني (ج).

مثال: $x^2 + 4x + 16$ مربع كامل

$$\text{لأن } 16 = 4^2 \text{ و } 1 = 1^2 \text{ و } 4 = 2 \times 1 \times 4$$

$$1 - 2 \times 4 \times 1 = 8 \quad (8) \quad (16)$$

$$2 - 2 \times 4 \times 1 = 8$$

$$16 \times 1 \times 1 = 16$$

$$8 = 8$$

• من حاصل جمع وضرب حلول المعادلة نجد الخيارات التالية:

إذا كان المعادلة $x^2 + 4x + 16 = 0$ لها حلين x_1 و x_2

$$\text{إذا } x_1 + x_2 = -4 \text{ و } x_1 \times x_2 = 16$$

مثال: نعتبر المعادلة: $x^2 + 4x + 16 = 0$

$$33 = 6 \times 2 \times 4 = 48$$

∴ معادلة الخطين x_1 و x_2 هي:

$$x_1 + x_2 = -4 \text{ و } x_1 \times x_2 = 16$$

• تحديد عددين معروف حاصل جمعهم

12 عدد إذا وجد عددين قيمتهما (4) وحاصلهما (4) بالفرق

الكل: لنفرض العددين هما x و y .

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$x = (y - 4) \Rightarrow 4 = (2 - 4) \Rightarrow 4 = -2$$

لأنه إذا كان s هو حقيقيان لهما علاء المعادلة
من الدرجة الثانية: $s^2 - 8s + 4 = 0$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 12$$

$\Delta > 0$. المعادلة لاهل لها .

∴ لا يمكن ايجاد عددين حاصل جمعهما 8 وحاصل
ضربهما 4 .

ع حدد أبعاد مستطيل بحيث محيطه 70 م ومساحته
300 م².

الحل: نعرف s هو ك أبعاد للمستطيل

$$\left. \begin{aligned} s + s = 35 \\ 300 = s(s - 35) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} s + s = 35 \\ 300 = s(s - 35) \end{aligned} \right\}$$

$$s(s - 35) = 300 \Rightarrow s^2 - 35s = 300$$

لأننا كان s هو ح فلا نهما تحققان المعادلة

$$s^2 - 35s = 300 \Rightarrow s^2 - 35s - 300 = 0$$

$$15 = \frac{30}{2} = \frac{25 - 35}{1 \times 2} = 1$$

$$20 = \frac{40}{1 \times 2} = \frac{25 + 35}{1 \times 2} = 2$$

المستطيل عرضه 15 م وطوله 20 م
وعليه فإن: $20 + 15 = 35 = 2 + 1$

$$\left\{ \begin{aligned} 20 + 15 &= 35 \\ 20 \times 15 &= \frac{300}{1} = 2 \times 1 \end{aligned} \right.$$

٤- المتباينات من الدرجة الثانية

1-2 حل متباينة من الدرجة الثانية

- علامة حدودية من الدرجة الثانية

فليكن الحدودية من الدرجة الثانية $ح(س)$ $= أس^٢ + بس + ج$
 لدينا: $ح(س) = ٢[أس + \frac{ب}{٢}] - \frac{ب^٢}{٤}$ $\Delta = ٥ - ٤ = ١$

التعبير صورة مربع كامل يبين أن علامة

الحدودية من الدرجة الثانية تتوقف على علامة مصفوفة

(١) المميز سالب: $\Delta > ٥$

نأخذ الحدودية $ح(س) = س^٢ + ٣س - ٥$
 المطلوب: ١- احسب قيمة المميز $ح(س)$

٢- اكتب $ح(س)$ على صورة مربع كامل

٣- برهن أن لكل عدد حقيقي $س$ ، $ح(س) > ٥$

(٢) المميز يساوي صفراً: $\Delta = ٥$
 هذا المعادلة: $٤س^٢ - ٢٥س + ٢٥ = ٥$

١- احسب المميز $ح(س)$

٢- برهن مداته: لكل عدد حقيقي $س$ ، $ح(س) = ٤(س - \frac{٥}{٢})^٢$

٣- أدرس علامة الحدودية $ح(س)$

٣- إذا كان المميز موجبا: $\Delta < ٥$

نأخذ الحدودية: $س(س) = ٢س^٢ + ٥س - ٣$

١- احسب المميز $س(س)$

٢- برهن مداته: لكل عدد حقيقي $س$ ، $س(س) = ٢(س + \frac{٣}{٢})^٢ - \frac{١٧}{٢}$

٣- أدرس علامة $س(س)$

١٩٢١

على العموم يمكن ان ندرس علامة الحدودية باستعمال الطرق التالية، بعد حساب المميز Δ .

$\Delta > 0$ الحدودية لاهل لها		$\Delta = 0$ الحدودية لها واحد $\frac{b}{p^2}$		$\Delta < 0$ ع (س) لها طين	
س	ص	س	ص	س	ص
علامة p	علامة p	علامة p	علامة p	علامة p	علامة p
علامة p	علامة p	علامة p	علامة p	علامة p	علامة p

أمثلة: حدد فيما يلي قيمة (س) وعلامة الحدوديات التالية:

$$\begin{aligned} \text{ع (س)} &= \text{س}^2 - \text{س} + 3, \text{ غ (س)} = 9\text{س}^2 + 6\text{س} - 1 \\ \text{س (س)} &= \text{س}^2 - \text{س} + 2. \end{aligned}$$

الحلول:

$$\begin{aligned} * \text{علامة ع (س)} \\ \text{لدينا: } \Delta = \text{ب}^2 - 4\text{ا} = 1 - 12 = -11 < 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ الحدودية ليست لها حل.

لكل عدد حقيقي س، ع (س) < 0

* علامة: ع (س)

$$\begin{aligned} \Delta = 0 \therefore \text{ع (س) لها حل واحد: } \frac{\text{ب}}{2\text{ا}} = \frac{1}{3} \\ \text{لكل عدد حقيقي س، متمايز عند } \frac{1}{3}, \text{ غ (س)} > 0 \end{aligned}$$

* علامة س (س)

إشارة المتباينة

مثال: ما هي إشارة المتباينة: $-2s + 8$ ؟
 الحل: يمكن دراسة إشارة المتباينة بدلالة s في الحالة الأولى:

الحالة الثانية

$$-2s + 8 \geq 0$$

$$-2s + 8 \leq 0$$

ولذا يعني أنه: $-2s + 8 \leq 0$ ولذا يعني: $-2s + 8 \geq 0$
 وبدلالة s المتباينات نعرف إشارة المتباينة:

$$-2s + 8 \leq 0$$

$$-2s + 8 \geq 0$$

$$-2s \leq -8$$

$$-2s \geq -8$$

$$s \geq 4$$

$$s \leq 4$$

ونملخص النتائج في الجدول:

s	$-$	$+$	$-$
4	4	4	4

أو جد إشارة: $-2s + 8$ ؟

مثال: عبّر عن $s + 1$ بدلالة s وبدلالة قيم s مختلفة.

حالة 1

$$s + 1 \leq 0$$

$$s \leq -1$$

$$s + 1 \geq 0$$

$$s \geq -1$$

$$s + 1 = |s + 1|$$

$$s + 1 = -(s + 1)$$

وعليه فإن الإشارة تكون

s	$-$	$+$	$-$
s	-1	-1	-1

حل المتراجحة: $(s-2)(s-3) \leq 0$

الحل: يكافئ: $s-2 \leq 0$ أو $s-3 \leq 0$ ، له إشارة موجبة

$s-2 \geq 0$ أو $s-3 \geq 0$ ، له إشارة موجبة

نأخذ النتائج في الجدول التالي:

s	$-\infty$	2	3	$+\infty$
إشارة $(s-2)$	-	0	+	+
إشارة $(s-3)$	-	-	0	+
إشارة $(s-2)(s-3)$	+	-	0	+

ومن هنا $s \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$

الصورة العامة للمعادلة
من الدرجة الثانية عن طريق Δ

$$\text{لدينا: } P = x^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4c$$

ملاحظة هامة:

(١) إذا كانت $\Delta = 0$ لها حل وحيد هو $\frac{-b}{2a}$

(٢) إذا كانت $\Delta > 0$ ليس لها حل ϕ

(٣) إذا كانت $\Delta < 0$ لها حلان

$$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} , \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

"الصورة العامة"

عم طريق Δ أوجد قيمة س .

$$x^2 + 6x + 9 = 0 , x^2 + 10x + 25 = 0$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0 , x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\text{* الحل: } x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ و } x = -3$$

$$1 = P , 3 = b , 9 = c$$

$$\Delta = b^2 - 4c = 3^2 - 4 \times 9 = 9 - 36 = -27 < 0$$

$$\therefore \Delta = 0 \text{ لها حل واحد } \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2} = -1.5$$

$$* \quad 2x^2 + 10x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$0 = 2x^2 + 2x + 2 = 2x^2 + 2x + 2 = 2(x^2 + x + 1) = 2\Delta$$

$$\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 1 - 4 = -3$$

$$\boxed{\Delta = -3}$$

* حل الباقي :

حل أنظمة من المتباينات الخطية ببيانها

تذكر بعض خواص علاقة التباين $\{ \}$:

إذا فرضنا أن : P, B, A ثلاث أعداد حقيقية
(1) ماذا كان : $P \geq B$.

فإن : $P + A \geq B + A$ سواء أكانت A موجبة أو سالبة
(2) إذا كان : $P \geq B$.

فإن : $P \cdot A \geq B \cdot A$ بشرط أن يكون A موجبة .
(3) ماذا كان $P \geq B$.

فإن $P \cdot A \leq B \cdot A$ إذا كانت A سالبة .

حل متباينة الدرجة الأولى في متغير واحد بيانها :
كل من المتباينات التالية وأمثلةها يسمى متباينة
من الدرجة الأولى في متغير واحد :

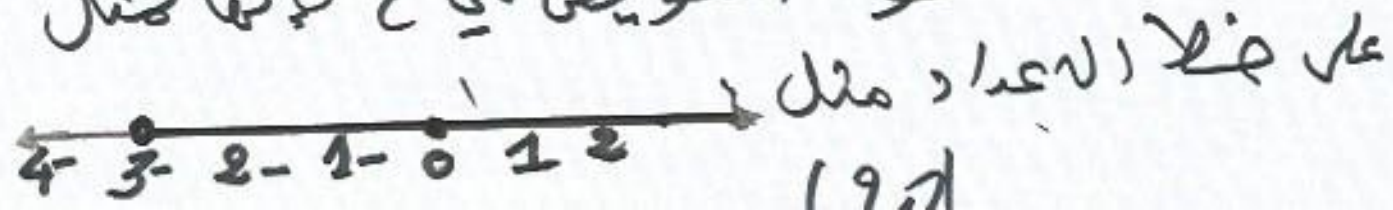
حيث a, b عددان حقيقيان
أمثلة : $2x \leq 5$, $3 \geq x > 6$.

أو جد بيانها مجموعة حل المتباينة : $3x + 10 < 1$

- إذا كان مجموع المتغيرات هي x, y, z ،
- إذا كان مجموع المتغيرات هي : x, y, z ،
الحل :

(1) $3x + 10 < 1$: $3x < -9$: $x < -3$

وعليه إذا كان مجموع المتغيرات هي x, y, z فإنها تمثل



مجموعة الحل هي الأعداد الأكبر من 3 وهي التي تقع في يمين المحل.

ووجود فلفة مفرغة تعني أنه -3 ليست ما مجموعة الحل.

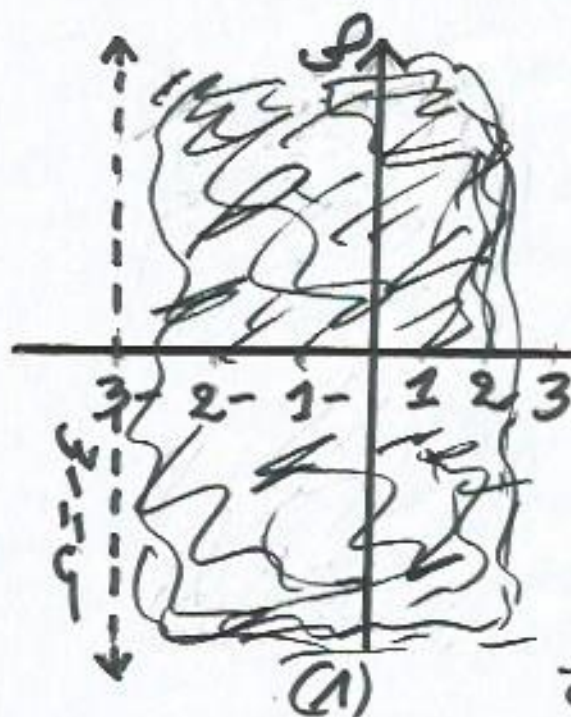
2) لذا كان مجموعة التقويض هي: $x < 4$.

إذن مجموعة الحل هي جميع الأزواج المرتبة التي مسقطها السيني أكبر من -3، والتي المنطقة التي تقع على يمين الخط المستقيم الذي تمثل المعادلة $x = -3$ ، وتسمى نصف المستوى، والمستقيم ترسم بشكل متقطع بمعنى أنه هذا الخط لا تنتمي إلى الحل.

لاحظ الرسم التالي: (1)

مثال 2: أوجد بيانياً مجموعة الحل للمتباينة: $x \geq 7$

الحل: $x \geq 7$



الحل: $x \geq 7$

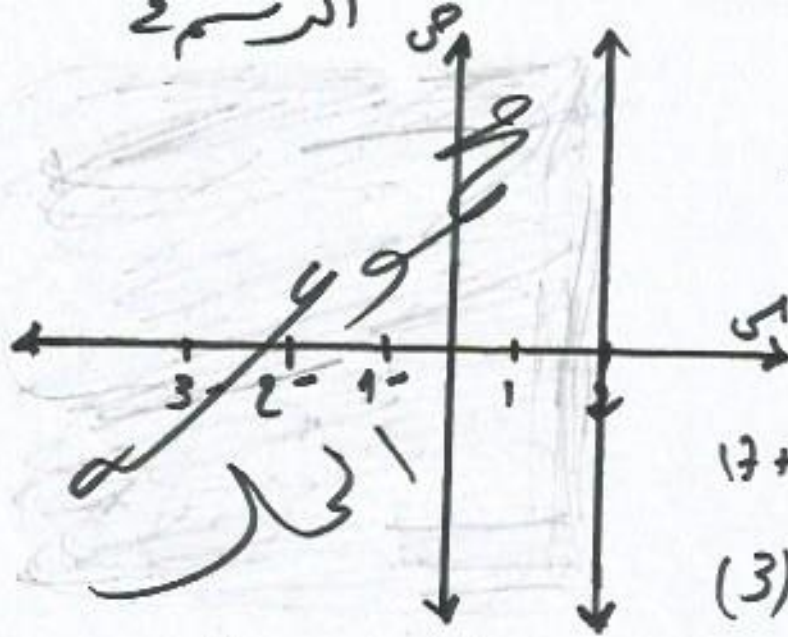
مجموعة الحل هي المنطقة المظلمة على يسار المحل $x = 7$ ، لأن علاقة التباين أكبر من.

الخطة المستقيمة $x = 7$ (أي الحل) ترسم متصلاً لاحتواء علاقة التباين على علامة التساوي $\geq$.

التمرين 2

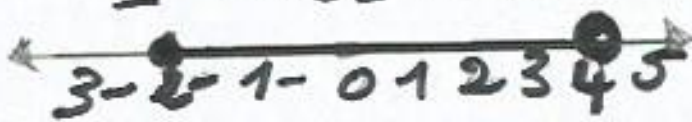
مثال ٣:

مثل بيانيا المتباينة
بحيث $x \geq 2$.



س - $1 \geq 4 + 5 + 2 + 17$
الحل: س - $1 \geq 4 + 5 + 2 + 17$
 $\therefore 6 \geq 3 + 12$
س - $2 \geq 4$ بالقسم (3)
 $\therefore \text{مجموع} = \{2, 4\}$

الرسم ٣
المثيل البياني



مثال ٤:

مثل بيانيا مجموعة حل المتباينة

س - $2 \geq 3 + 1 - 5$ بحيث $x \geq 2$.

الحل: يمكن أن نحجز المتباينة إلى متباينتين كالآتي:

$$(1) \quad 2 - 3 \geq 2 - 1$$

$$(2) \quad 2 - 3 \geq 1 - 2$$

$$-1 \geq 1$$

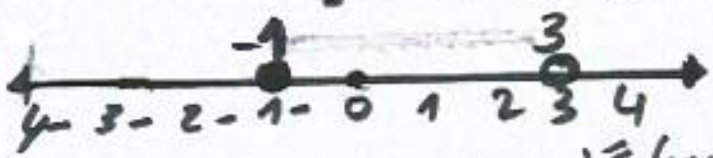
$$1 \leq 1$$

$$\therefore \text{مجموع} = \{1, \infty\}$$

المجموعة المعوض للمتباينة (الاحتمالية)

$$\text{مجموع} = [1, \infty) \cup [3, \infty) = [3, \infty)$$

وتمثيلها البياني هي:



والعدد من 1 إلى ما لا نهاية
والعدد من 3 إلى ما لا نهاية

يتم تعيينها

(122)

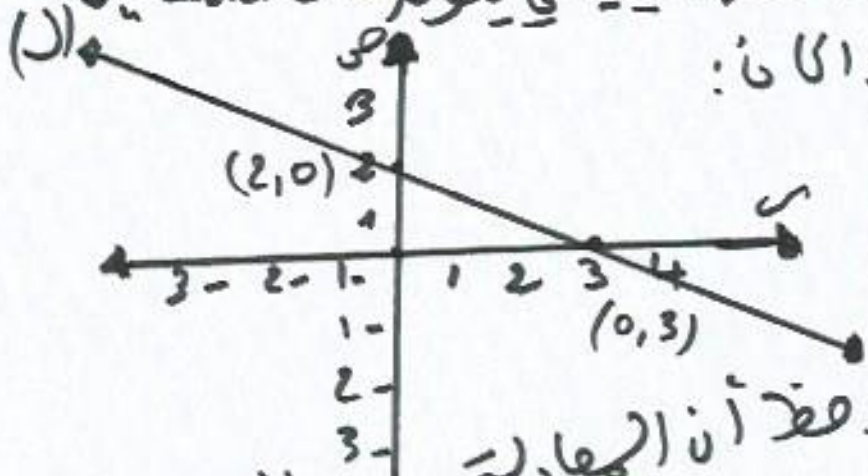
حل متباينة

حل متباينة الدرجة الأولى في متغيرين بيانياً.

تذكر تمثيل الدوال الخطية (المعادلات).

مثلاً: $2س + 3ص = 6$ علماً البياني يكون خطاً مستقيماً كالآتي بحيث أنه إذا كان:

س	0	3
ص	2	0



بهذا الرسم البياني نلاحظ أن المعادلة جزء المستوى - مجموعة: $2س + 3ص < 6$ وهي النقطة التي تقع أعلى المستقيم ل وتسمى خطاً المستوي. كل نقطة منها تحقق أنه $2س + 3ص < 6$.

- مجموعة تقع أسفل المستقيم ل بحيث أن كل نقطة منها تحقق أنه: $2س + 3ص > 6$ وتسمى خطاً المستقيم ل وكل منها يحقق المعادلة: $2س + 3ص = 6$.

مثال: أوجد بيانياً المتباينة:

$س - 3ص \geq 3$ في $\{2, 3\}$

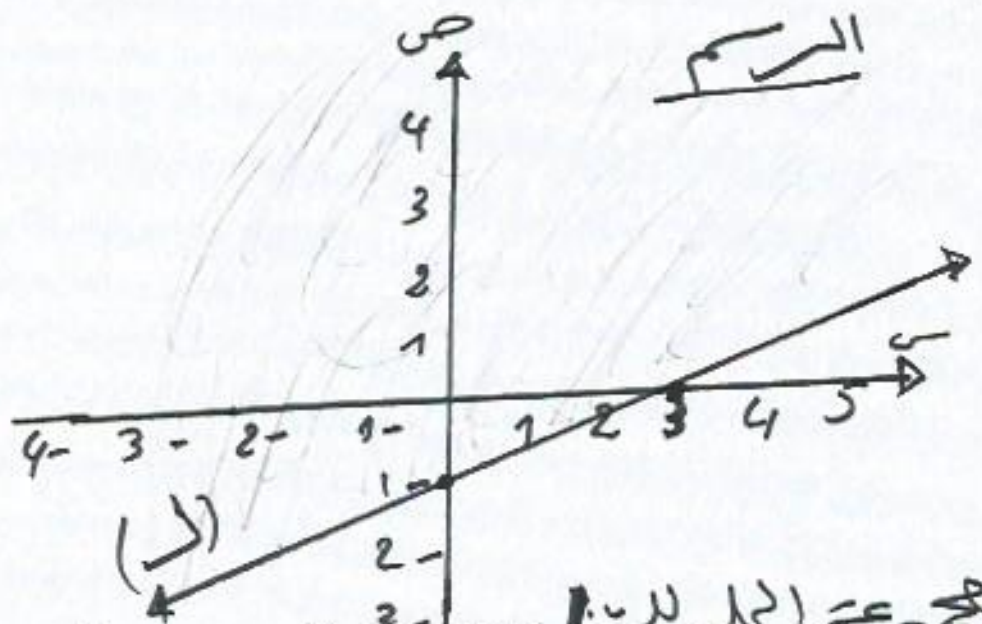
الحل: 1) نرسم المستقيم الجديد الذي معادلته: $س - 3ص = 3$

تذكر أن الخط يكون مثلاً لأن علامة المتباينة

يحتوي على المساوي ($\geq$)
نأخذ جوهولداً:

س	0	3
ص	-1	0

الرسم



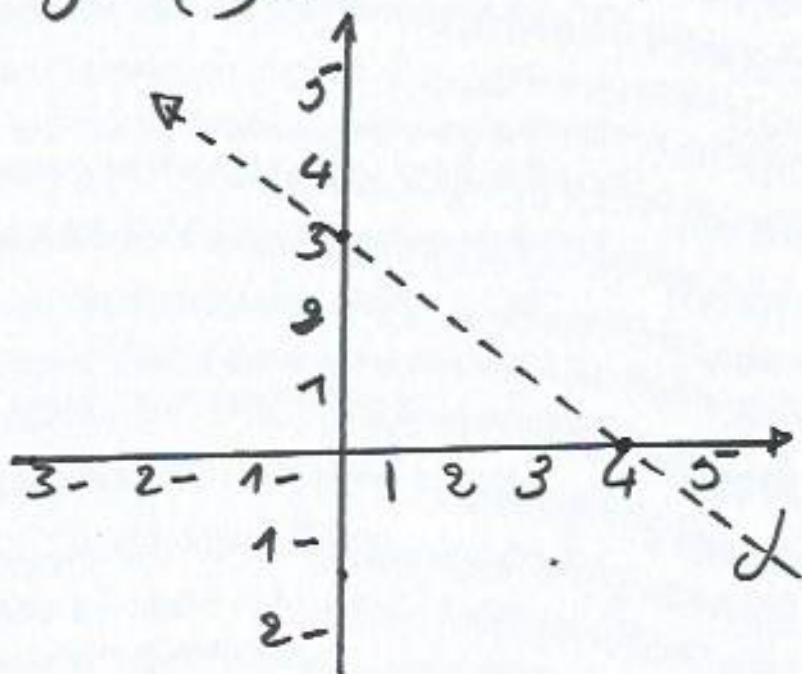
مجموعة الحل للمتباينة هي المستقيم لا نصف المستوى الذي
تتضمن إليه النقطة $(0, 0)$ وهي (أ) المستقيم.

مثال 2: مثل بيانيا : $3س + 4ع < 12$. $[ع, س]$

الحل: نحول المتباينة إلى المعادلة التالية:
 $3س + 4ع = 12$ ثم توجد عليها البياني كما أن هذا الخط

يرسم متقطع لعدم اعتواء علاقة التباين بالتساوي
(7) بمعنى أن المستقيم لا تتضمن (أ) مجموعة الحل.

س	0	4
ع	3	0



ملاحظة:

ملاحظة: (1) لتسهيل حل المتباينة بمتغيرين نستعين بنقطة الأصل (0,0) فإذا كانت المتباينة (0,0) لا تحقق المتباينة أي مثل $12 > 0$

الملاحظة: (0,0) هي مركز المستقيم

في المعادلة $x = 0$ تمثل بياضا بمحور السينات

$y = 0$ تمثل بياضا بمحور الصادات

$x = p$ المستقيم يوازيه محاور السينات ويمر بالنقطة (p,0)

$y = p$ المستقيم يوازيه محاور الصادات ويمر بالنقطة (0,p)

(3) معادلة المستقيم عمودية: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ تمثل بياضا بمستقيم يمر بالنقطتين (p,0) و (0,q)

أوجد بياضا: $2x - 5y \geq 10$ في [2,7]

حل أنظمة من المتباينات الخطية بياضا:

أولاً: نوجد المنطقة التي تمثل مجموعة الحل للمتباينة الأولى
ثانياً: المنطقة التي تمثل مجموعة الحل للمتباينة الثالثة
فنكون مجموعة الحل للمبتاينتين معا تمثلها المنطقة المشتركة من السطيل حيث $x = 1$ و $y = 2$

لذا لم تكن هناك تقاطع بين المتباينتين فالحل هو $\emptyset$ (فأه) الأمثلة:

أولاً: $2x + y < 6$ و $4x + y \geq 4$ في [2,7]

الحل (1) $2x + y = 6$

(2) $4x + y = 4$

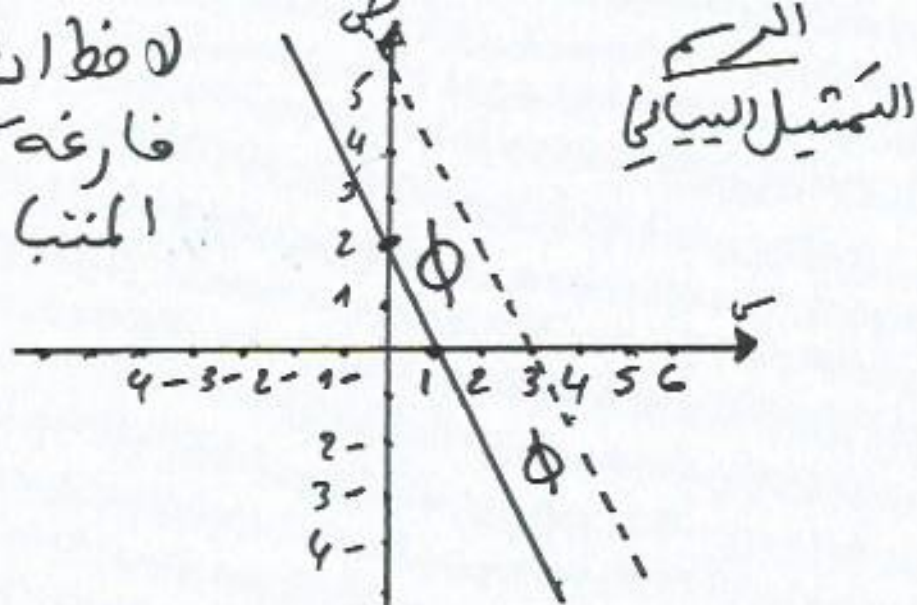
3	0	س
0	6	ص

1	0	س
0	4	ص

(2,1)

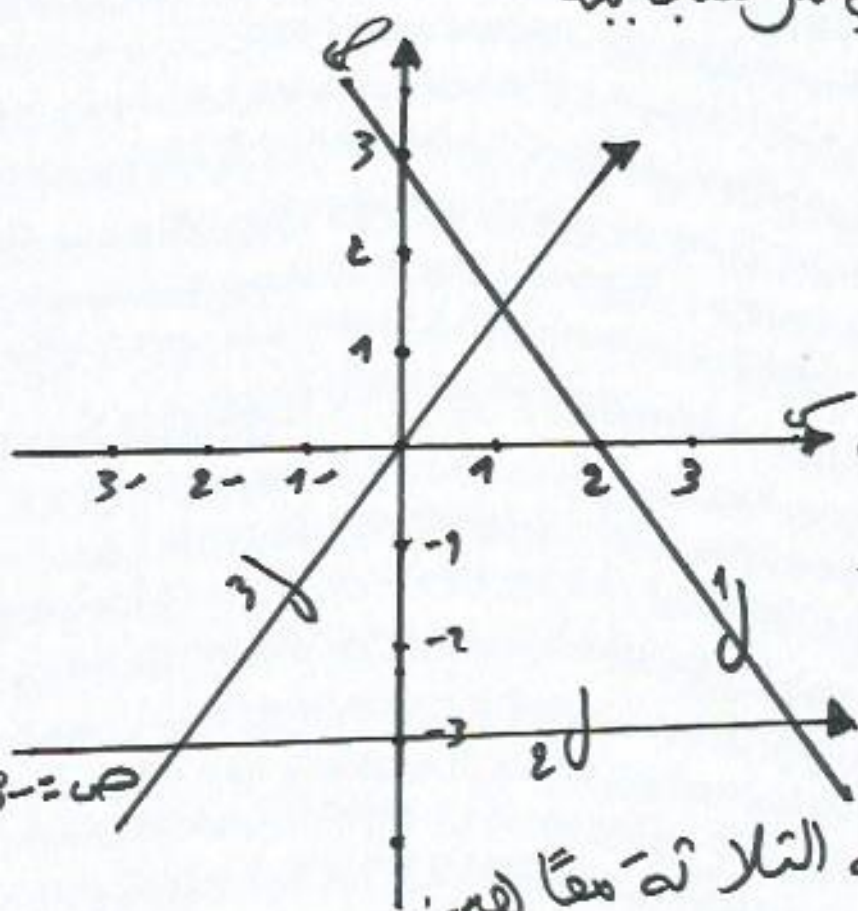
البرهان

لا فظا لم كل عبارة عن منطقة فارغة لا توجد تقاطع بين المتباينتين .



مثال آخر: (1) $3 \leq x + y \leq 6$ (2) $0 \leq y - x \leq 3$ في $\{x, y\}$.

نرسم المستقيم الحدي لكل متباينة



(1) $3 \leq x + y \leq 6$ يمر بالنقط: $(0, 3)$ ، $(3, 0)$.

(2) $0 \leq y - x \leq 3$

ص = - ص، ص = ص، خط متصل

يواز في محور السينات

ص = ص - ص = 0 يمر بالنقط $(0, 0)$ ، $(1, 1)$.

∴ مجموعة حل المتباينات الثلاثة معاً هي المنطقة المعصورة بين هذه المستقيمات ∴ $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3$.

مثال: منع

مثال : مصنع للإنتاج لعب الالهفان ينتج لعبة
 على شكل سيارة، وأخرى على شكل طائرة يعمل
 بطاقة الإنتاج يومي قدرها 210 لعبة على الأكثر
 فإذا كانت تكلفة الإنتاج للسيارة الواحدة 150 فرنك،
 وتكلفة إنتاج الطائرة الواحدة 100 فرنك، والتكلفة
 الاجهالية للإنتاج اليومي لا تزيد عن 30000 فرنك
 . أكتب نظام متباينة خطية
 . أوجد التمثيل البياني الذي تمثل حل هذا النظام.

الحل : نضرب عدد السيارات المنتجة هي x سيارة
 والطائرات المنتجة هي y طائرة .
 وبه تكون نظام المتباينة هي : $x \geq 0, y \geq 0$ ؟

$$(1) \quad x + y \geq 210$$

$$(2) \quad 150x + 100y \geq 30000 \text{ بالقسمة على } 50$$

$$3x + 2y \geq 600$$

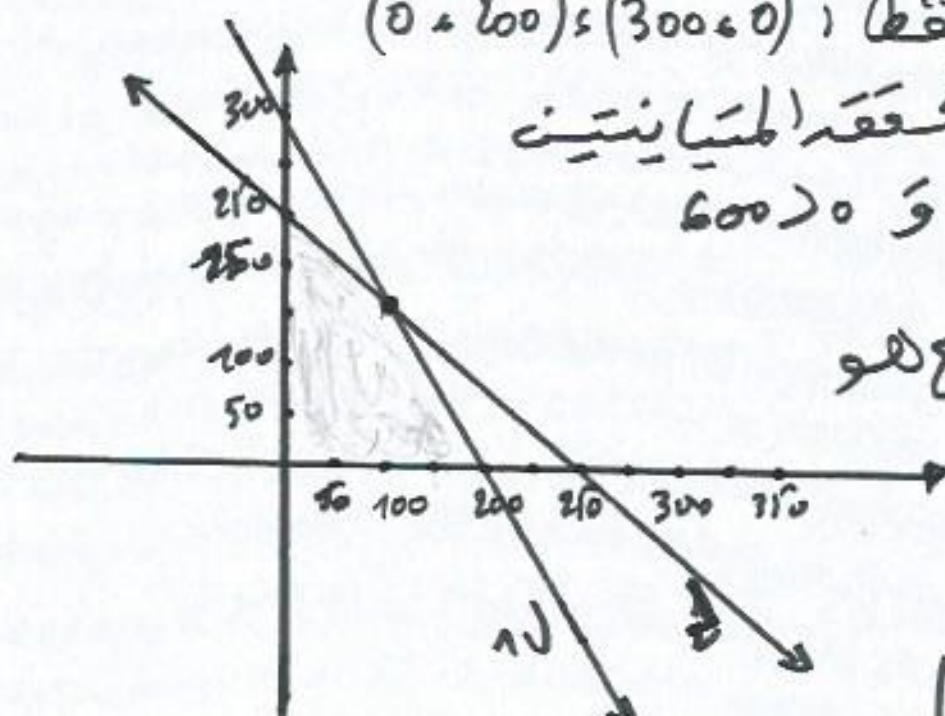
تعيين النقط :

$$(1) \text{ يمر بالنقط : } (210, 0), (0, 210)$$

$$(2) \text{ يمر بالنقط : } (300, 0), (0, 600)$$

$$\therefore (0, 0) \text{ تحققه المتباينتين}$$

$$\therefore 210 > 0 \text{ و } 600 > 0$$



نلاحظ ان التقاطع هو

$$(100, 110)$$

الكسور الجبرية

اعلم انه الحدوديات اذا اقتصرت على

متغير واحد سميت تطبيق حدوديا .

يرمز له بأحد الرموز ت ، أ ، هـ ، د ، م ،

فمثل ت (س) = س² + 3س - 5 (تطبيق حدوديا)

كذلك هـ (ص) = ص³ + 3ص - 5 .

التطبيق الحدودية النسبي :

يقال للتطبيق هـ انه تطبيق حدودية نسبي

اذا وجدنا تطبيقا حدوديا ت ، د بحيث

$$\frac{ت(س)}{د(س)} = \frac{هـ(س)}{د(س)} \quad , \quad د(س) \neq 0$$

لذا فانه : $\frac{1-3}{2+5}$ ، $\frac{2-5-8}{3+5-8}$ ، $\frac{3+5}{1-5}$ حيث س ≠ 1 .

نسمى تطبيقات نسبية . أو الكسور الجبرية .

أولا : اختصار الكسور الجبرية :

$$\frac{15}{40} = \frac{5 \times 3}{5 \times 8} = \frac{3}{8}$$

ايلا تتغير قيمة العدد النسبي اذا ضرب كل ما بسو

والمقام في عدد حقيقي غير الصفر .

$$\frac{2p}{p} = \frac{1 \times 1}{1 \times 1} = \frac{1}{1}$$

$$\frac{7}{2} = \frac{8 \times 7}{8 \times 2} = \frac{56}{16}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 4}{5 \times 4} = \frac{12}{20}$$

$$0 \neq 5, \quad \frac{4-5}{5} = \frac{4 \times 5 \times 5}{5 \times 5} = \frac{4-5}{5}$$

$$0 \neq 2, \quad \frac{3-5}{5} = \frac{(2-5)5}{(2-5)5}$$

وذلك بقسمة كل من البسط والمقام على
ح. م. م. لهما بشرط ألا يكون هذا العامل
المشترك الأعلى يساوي صفرًا ويكون التطبيق
النسبي في أبسط صورة له إذا لم يوجد بين
بسطه ومقامه عامل مشترك.

مثال 1: ضع $\frac{p-3}{p-6}$ في أبسط صورة حيث p ثابت $p \neq 0$.

$$\text{الحل: } \frac{p-3}{p-6} = \frac{1 \times p-3}{1 \times p-6} = \frac{p-3}{p-6}$$

$$\text{مثال 2: اختصر } \frac{6+5-2}{9-2}$$

$$\text{الحل: } \frac{(3+5-2)}{(3+5)(3-2)} = \frac{6+5-2}{9-2}$$

$$\frac{2}{3-5} =$$

$$\text{مثال 3: اختصر } \frac{6+5-2}{2-5-3}$$

$$\text{الحل: } \frac{3-5}{1+5} = \frac{(2-5)(3-5)}{(1+5)(2-5)} = \frac{6+5-2}{2-5-3}$$

تمارين: ضع كلا

تمارين

ضع كلا مما يأتي في أبسط صورة:

$$(1) \frac{4^3 p^4}{2^5 p^8}, (2) \frac{3^2 p^2 q}{2^3 p^2 q}, (3) \frac{4 - s^2}{4 - s^2}$$

$$(4) \frac{4 - s^2}{8 - s^2 - s^2}, (5) \frac{30 + s - 11 - s^2}{5 - s - 4 - s^2}$$

$$(6) \frac{14 - s - 5 - s^2}{4 + s - 4 + s^2}, (7) \frac{6 - s - s^2}{6 + s - 4}$$

$$(8) \frac{5 + s - 8 - s^2}{1 - s}, (9) \frac{6 + s - 13 - s^2}{3 - s - s^2}$$

ضرب وقسمة الكسور الجبرية:

$$(1) \text{ الضرب: نعلم أن: } \frac{12}{28} = \frac{3 \times 4}{7 \times 4} = \frac{3}{7} \times \frac{4}{4}$$

وبالقياس على ذلك يكون:

$$\frac{a p}{b q} = \frac{a \times p}{b \times q} = \frac{a}{b} \times \frac{p}{q}$$

مثال (1): أوجد: $\frac{s^2 p^3}{s - 10} \times \frac{s - 5}{s^2 - 6}$ في أبسط صورة.

الحل: $\frac{p}{4} = \frac{s^2 p^3 \times s - 5}{s - 10 \times s^2 - 6} = \frac{s^2 p^3}{s - 10} \times \frac{s - 5}{s^2 - 6}$

مثال (2): أوجد $\frac{1}{2 + s} \times \frac{4 - s^2}{1 + s}$ في أبسط صورة

الحل: $\frac{2 - s}{1 + s} = \frac{1}{(2 + s)} \times \frac{(2 + s)(2 - s)}{1 + s}$

مثال 3

مثال 3: اوجد ناتج: $\frac{1-s^2}{3-s} \times \frac{3-s}{1+s}$

الحل: $\frac{(1+s)(1-s)}{(3-s)} \times \frac{(3-s)}{1+s} = \frac{1-s^2}{3-s} \times \frac{3-s}{1+s}$
 $(1-s)3 =$

مثال 4: ضع في ابسولة صورة:

$$\frac{s^2+3s-2}{1+s+2+s^2} \times \frac{s^2+6s+5}{10-s-3-s^2}$$

الحل: $\frac{1-s}{1+s} = \frac{(1-s)(2-s)}{2(1+s)} \times \frac{(1+s)(2+s)}{(2-s)(5+s)}$

القسمة في الكسور الجبرية:

نعلم انه $\frac{8}{3} = \frac{10}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{10} \div \frac{4}{5}$
 كذلك يكون:

$\frac{30}{50} = \frac{6}{10} \times \frac{1}{5} = \frac{10}{6} \div \frac{1}{5}$

مثال 1: اوجد ناتج:

$$\frac{s-10}{9} \div \frac{s-5}{3}$$

الحل: $\frac{s-3}{2} = \frac{9}{s+10} \times \frac{s-5}{3}$, $s \neq 0$

مثال 2: $\frac{s^2+6s-9}{18+s-9-s^2} \div \frac{s^2-9}{6+s-2}$

الحل: $\frac{18+s-9-s^2}{9+s-6-s^2} \times \frac{s^2-9}{6+s-2}$

$\frac{6-s}{2} = \frac{(6-s)(3-s)}{2(3-s)} \times \frac{(3+s)(3-s)}{(3+s)2} =$

مثال 3 (ختم في

مثال 3: اختصر $(\frac{4}{5} \times \frac{3}{2}) \div \frac{3}{5}$

الحل: $\frac{1}{3} = \frac{5 \times 2}{4 \times 3} \times \frac{3}{5} = \frac{4 \times 3}{5 \times 2} \div \frac{3}{5}$

مثال 4: اختصر $\frac{4}{5} \times (\frac{3}{2} \div \frac{3}{5})$

الحل: $\frac{8}{25} = \frac{4 \times 2 \times 3}{5 \times 3 \times 5} = \frac{4}{5} \times (\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}) = \frac{4}{5} \times (\frac{3}{2} \div \frac{3}{5})$

مثال 5: اختصر: $\frac{5}{5} \div (\frac{4}{3} \times \frac{2}{5})$

الحل: $4 = \frac{5}{5} \times \frac{4}{3} \times \frac{2}{5}$

مثال 6: اختصر:

$$\frac{2-s-2}{9-s} \times (\frac{1+s}{3-s} \div \frac{3+s}{2-s})$$

الحل: $\frac{2-s-2}{9-s} \times (\frac{3-s}{1+s} \times \frac{3+s}{2-s})$

$$1 = \frac{(1+s)(2-s)}{(3+s)(3-s)} \times \frac{3-s}{1+s} \times \frac{3+s}{2-s} =$$

ما ربيـن

أوجد في أبسط صورة ما يلي:

$$\frac{12}{5} \times \frac{2}{5}, \quad \frac{2-s}{3} \times \frac{3}{4}, \quad \frac{12}{7} \times \frac{3}{5}$$

$$\frac{5-s-4+s}{6+s-3} \times \frac{2+s}{1-s}, \quad \frac{6+s-2}{4+s-2} \times \frac{4-s}{6+s-5}$$

$$\frac{6+s-8}{s-5} \times (\frac{s+3}{s} \div \frac{1-s}{2+s}), \quad \frac{s}{11} \div (\frac{33}{s} \times \frac{5-s}{3})$$

جمع وطرح

(47)

جمع وطرح الكسور الجبرية:

نعلم أنه: $\frac{9}{4} = \frac{5+3+1}{4} = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$

كذلك يكون: $\frac{9}{5} = \frac{5+3+1}{5} = \frac{5}{5} + \frac{3}{5} + \frac{1}{5}$

ونعلم أنه لايجاد: $\frac{1}{3} - \frac{5}{3} + \frac{3}{4}$

نقول أن م م م للمقامات = 12

يكون: $\frac{23}{12} = \frac{6-10+9}{12} = \frac{6 \times 1 - 10 \times 5 + 9 \times 3}{12} = \frac{1}{2} - \frac{5}{3} + \frac{3}{4}$

كذلك لايجاد الناتج:

$$\frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

نقول أن م م م للمقامات = $\sqrt{2}$

$$\frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \therefore$$

$$\frac{(5) - (1-\sqrt{2}) + (3+\sqrt{2})}{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{1-\sqrt{2}+5}{\sqrt{2}} = \frac{5-1-\sqrt{2}+\sqrt{2}+6}{\sqrt{2}} =$$

مثال 1: اختصر: $1 + \frac{3+\sqrt{2}}{3} - \frac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

الحل: م م م للمقامات = 6

$$\frac{\sqrt{6} + (3+\sqrt{2})2 - (5-\sqrt{2})3}{6} = 1 + \frac{3+\sqrt{2}}{3} - \frac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \therefore$$

$$\frac{21-5\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{6}+6+4\sqrt{2}-15-\sqrt{2}}{6} =$$

مثال 2 اختصر $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$

مثال 2: اختصر: $\frac{x-3}{x-1} + \frac{x-2}{x+1}$

الحل: $\frac{x-3}{(x+1)(x-1)} + \frac{x-2}{x+1} = \frac{x-3}{x-1} + \frac{x-2}{x+1}$

وبكوك م. م. م. للمقامات $(x-1)(x+1)$

$\therefore \frac{x-3+(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{(x+1)(x-1)} + \frac{x-2}{x+1}$

$\frac{(x-5)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-2-x-5}{(x-1)(x+1)} = \frac{-x-3}{(x-1)(x+1)} =$

مثال 3: اختصر: $\frac{3}{x+2} - \frac{5+x}{x^2+5x+6} - \frac{2-x}{x^2-3x-10}$

الحل: $\frac{3}{x+2} - \frac{5+x}{(x+2)(x+3)} - \frac{(1-x)(2)}{(x+2)(5-x)}$

$= \frac{(3+x)(5-x)3 - (5+x)(5-x)2 - (3+x)(1-x)2}{(3+x)(2+x)(5-x)}$

$= \frac{45+x6+x^23-25+x10+x^23-6-x16+x^26}{(3+x)(2+x)(5-x)}$

$= \frac{(2+x)32}{(3+x)(2+x)(5-x)} = \frac{64+x32}{(3+x)(2+x)(5-x)}$

$= \frac{32}{(3+x)(5-x)}$

تمارين

اختصر: $\frac{3}{9-x} - \frac{5}{3+x} \cdot \frac{4-x}{4+x} - \frac{4+x}{2-x}$

$\frac{3}{9-x} - \frac{1}{x-2} \cdot \frac{x-5}{35-x^2+x} - \frac{4+x}{28-x^2-x}$

$\cdot \frac{x-3}{18-x^2+x} - \frac{3+x}{15+x^2+x}$

المصفوفات:

نهج لعرض وتخزين البيانات في صورة جداول مستطيلة الشكل، تؤدي لسهولة تذكرها والمقارنة بينها واجراء العمليات الحسابية المتعلقة بهذه البيانات.

اول تنظيم البيانات في مصفوفات:

أحد محلات البيع الاطعمة يبيع اربعة انواع من الاطعمة (المحضرورات، الدجاج، اللحوم، الخبز في صحن) وينتج لكل نوع من هذه الانواع ثلاثة أحجام مختلفة صغير، وسط، كبير.

ولسهولة تذكر المعلومات وللمقارنة بينهما وضع القطع المباعة يوميا في جدول بصورة مختصرة كالتالي:

النوع	صغير	متوسط	كبير
المحضرورات	15	13	9
الدجاج	16	18	12
اللحم	13	10	8
الخبز	18	20	17

تلاحظ أنه:

كل عدد في هذا الجدول له دلالة معينة. مثلا العدد 15 يدل على عدد القطع المباعة من المحضرورات حجم صغير.

- والعدد 12 يدل على عدد القطع المباعة من الدجاج حجم كبير وهكذا.

واسنغنا من الحدود ثم تبدلها وكتابة البيانات
في صورة أكثر اختصاراً، وذلك بكتابة الأعداد
فقط المتضمنة فيه نفس ترتيبها داخل قوسين كبيرين:
() فنكتب متوسط البيع اليومي للمحل:

تسمى هذه الصورة مصفوفة أعداد
كما تسمى الأعداد بين القوسين عناصر
المصفوفة

9	13	15
10	18	16
8	10	13
17	20	18

المثال السابق تتكون من: أربعة صفوف
وثلاثة أعمدة، لذلك نقول بأنها مصفوفة على النظام
 4×3 ، واختصار مصفوفه (4×3) ، ويجب ذكر
عدد المصفوفه أولاً ثم عدد الأعمدة وليس العكس
التعبير عن العنصر داخل المصفوفة:
- يرمز المصفوفة عادة - بأحد الحروف الكبيرة مثل:

P, B, C, S, ...

بينما يرمز للعنصر داخل المصفوفة بأحد الحروف
الصغيرة مثل P, B, C, S, ...

- إذا كنا نجرع العنصر داخل المصفوفة P الذي
يقع في الصف

مثال: اكتب جميع عناصر المصفوفات التالية

- 1- المصفوفة $P = (P_{ij})$ بحيث $P_{11} = 1, P_{12} = 3, P_{13} = 1, P_{21} = 2, P_{22} = 1, P_{23} = 1$
 - 2- المصفوفة $P = (P_{ij})$ بحيث $P_{11} = 1, P_{12} = 3, P_{13} = 1, P_{21} = 2, P_{22} = 1, P_{23} = 1$
- وبين نظم كل مصفوفة.

الحل

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ب (ب 11 ب 12 ب 13) وهو على النظام 2×3

مثال: اكتب المصفوفة (P_{ij}) على النظم 3×2 بحيث

$$P_{11} = 1, P_{12} = 3, P_{13} = 1, P_{21} = 2, P_{22} = 1, P_{23} = 1$$

الحل

$$P_{11} = 1, P_{12} = 3, P_{13} = 1, P_{21} = 2, P_{22} = 1, P_{23} = 1$$

$$P_{11} = 1, P_{12} = 3, P_{13} = 1, P_{21} = 2, P_{22} = 1, P_{23} = 1$$

$$P_{11} = 1, P_{12} = 3, P_{13} = 1, P_{21} = 2, P_{22} = 1, P_{23} = 1$$

$$\therefore P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

تمرين: اكتب جميع عناصر المصفوفات:

$$P = (P_{ij}) \text{ بحيث } P_{11} = 1, P_{12} = 3, P_{13} = 1, P_{21} = 2, P_{22} = 1, P_{23} = 1$$

ملاحظات: هناك بعض المصفوفات الخاصة

نذكرها

نذكرها كالتالي:

- المصفوفة الصفيرية: هي التي تكون جميع عناصرها أصفارا وترمز لها بالرمز $\square$. فمثلا $\square \times \square = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ مصفوفة صفيرية على النظام (2×2) .
- مصفوفة الصف تتكون من صف واحد، وأن عدد من الأعمدة. مثلا:

$$P = (1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6) \text{ على النظام } 1 \times 5$$

- مصفوفة العمود مكون من عمود واحد وأن عدد من الصفوف.

مثلا: $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظام 3×1 .

- المصفوفة مربعة، وفيها تكون عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة.

فمثلا: $P = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ على النظام 2×2

- المصفوفة القطرية: عبارة عن مصفوفة عدد المصفوفة يساوي عدد الأعمدة أنه مصفوفة مربعة وجميع عناصرها عبارة عن أصفار ما عدا عناصر القطر الرئيسي فيكون أحدها على الأقل لا يساوي الصفر بحيث أن القطر الرئيسي يتألف من العناصر P, P, P, P, P, P ومثلا $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ مصفوفة 3×3

$\checkmark \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظام 2×2 وهكذا

- مصفوفة الوحدة: هي قطريه وفيها تكون جميع عناصر القطر يساوي 1. مثلا: $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ مصفوفه على النظم $C \times C = J$ على النظم 3×3 .

التطبيقات:

• المصفوفات المتساوية:

"تكون مصفوفتان متساويتان اذا كان:

1- المصفوفتان على النظم نفسه.

2- جميع عناصر المصفوفة A يساوي عناصر المصفوفة.

مثلا: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ بينما $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ وكذلك $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ لا تتلافه النظم.

مثال: المصفوفتان متساويتان: $C = 1 - S$ ، $S = 5 + C$ ومنها $S = 3$

$C = 3 - 7$ ومنها $S = 5$

تمرين: اوجد قيمة S اذا كان $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} =$$

• ضرب عدد حقيقي في مصفوفة:

وتعني ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة

في ذلك العدد الحقيقي.

مثلا: $P =$

(111)

$$\text{مثلاً: } P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ غلاف } P = \begin{pmatrix} 2 \times 3 & 2 \times 2 & 2 \times 6 \\ 2 \times 0 & 2 \times 4 & 2 \times 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 4 & 12 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} \text{ وبالمثل } P = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 18 \\ 0 & 12 & 6 \end{pmatrix}$$

بالضرب المباشر

$$A \text{ أوجه } = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 4 \\ 14 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ الجواب } P$$

$$\text{مثال آخر: } P = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 16 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ فأوجد قيمه لـ } P$$

الحل:

$$\therefore \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 16 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \therefore 20 = 5 \times 4 \text{ و } 10 = 5 \times 2$$

ومنها $5 = 4 \times 1$ و $16 = 4 \times 4$ ومنها $8 = 4 \times 2$

$$\therefore P = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

مدور المصفوفة: ونعني تغيير نظم المصفوفة

أي إذا كان لدينا المصفوفة 3×2 مدورها هو 2×3 . استبدلنا المصفوفة بالانعكاس

$$\text{مثلاً: } P = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = P \cdot 3 \times 2 = P$$

$$\text{إذا كانت: } P = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 \end{pmatrix} = P \cdot 1 \times 3$$

$$P = 3 \times 1$$

أ

ان ب مصفوفة عمود ، ب^{مد} مصفوفة صف .

مثال : $P = \begin{pmatrix} \text{خطاهو} & \text{قاهو} \\ \text{قناهو} & \text{جاهو} \end{pmatrix} = B$, $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ وكانت :

$P = B$ مد . فأوجد قيمة كل من س ، ص

الحل

$P = B$ مد . $\therefore \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \text{ ص}$ ومنها س = $\frac{2}{3}$ ،

$\frac{1}{3} \text{ ص} = \frac{1}{3}$ ومنها ص = 4

نمبرين : أوجد : $\frac{1}{3} \text{ س}$ إذا كانت : $\begin{pmatrix} 3 & 3+3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 4- \\ 5 & 5- \end{pmatrix}^{\text{مد}}$

المصفوفات المتماثلة وشبه المتماثلة :

المتماثلة إذا كانت المصفوفة نفسها تساوي

مدورها . $P = P^{\text{مد}}$

شبه متماثلة إذا كانت المصفوفة نفسها تساوي

مطروح مدورها . $P - P^{\text{مد}}$

مثلا : $P = \begin{pmatrix} 3- & 1- & 2 \\ 0 & 4 & 1- \\ 5 & 0 & 3- \end{pmatrix}$ فإن $P^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} 3- & 1- & 2 \\ 0 & 4 & 1- \\ 5 & 0 & 3- \end{pmatrix}$

أي أن $P = P^{\text{مد}}$

إذا كانت $P = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 3- \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ مصفوفة

متماثلة فأوجد : س ، ص .

الحل = 9

الحل

P مصفوفة متماثلة ، $\therefore e - s = 4$ وعليه $s = -2$

$s + e = 8$ ، $\therefore -2 + e = 8$ وعليه $s = 5$

إذا كانت $B = \begin{pmatrix} 7 & 3s & 0 \\ e-2 & 0 & 3+e \\ 0 & 6 & 3-s \end{pmatrix}$ شبه متماثلة

فأوجد s ، الحل

B مصفوفة شبه متماثلة ، $\therefore e + 3 = -3 - s$

بالتعويض نجد أن $3 - s = -5$ ، $7 - s = 3 + 3$ (1)

(2) $7 - s = 3 - 3$

$$-e = 6 \Rightarrow e = -3$$

$$7 = (e - 1) - 3$$

جمع وطرح المصفوفات :

عملية الجمع في المصفوفات تكون ممكنة إذا كانه مصفوفتان لهما نفس النظم وتكون ناتج الجمع عبارة عن مصفوفة لها النظم نفسه ، وكل عنصر فيها عبارة عن مجموعة العنصرين المتناظرين في المصفوفتين .

مثلاً : إذا كانت $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ فكون

$$P + B = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+5 \\ 2+3 & 9+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$$

مثال P =

$$\text{مثال } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = 7$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{فأوجد } A \text{ أمكن } P+B, \\ 2P+C, B+C$$

$$\text{الحل: } = B+P = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = 2P+C$$

$$B+C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 14 & 6 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

لا يمكن لأنها ليست على النظم نفسه 3×2

$3 \times 2 \neq 2 \times 3$

$$\text{مثال } P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 6 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \text{ هل } (B+P) \text{ مد}$$

$$P+B = ?$$

مثال آخر أوجد قيم P و B التي تحقق المعادلة:

$$\begin{pmatrix} 1+B & 4 \\ 3 & 3+D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & P \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & P \\ 3 & D \end{pmatrix} \quad 3$$

$$\text{الحل: } \begin{pmatrix} 4+B & 4 \\ 3 & 3+D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & P_2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_3 & P_3 \\ 9 & D_3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 16+B & 4+P_2 \\ 9 & 1+D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_3 & P_3 \\ 9 & D_3 \end{pmatrix} \text{ وعليه}$$

$$8 = B, 16+B = B_3, 4 = P = 4+P_2 = P_3$$

$$\frac{1}{2} = D \therefore 1+D = D_3$$

الاجابة: $B=8$

11/11

ملاحظة: على المدرس المزيد من التمارين والبحث من خواص عملية الجمع ، و اعلم أن عملية طرح المصفوفات لا يتعاكس مع عملية الجمع ، وكلما ينطبقه على الجمع ، ينطبقه مع الطرح ، لا عليك إلا العمل لا أن تشارك .

ضرب المصفوفات:

تكون ضرب المصفوفات معرفا إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى تساوي عدد أعمدة المصفوفة الآخر

فمثلا: $P = \begin{pmatrix} 21P & 11P \\ 22P & 12P \\ 23P & 13P \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 21B & 11B \\ 22B & 12B \end{pmatrix}$ فلن

P على النظم 3×2 ، B على النظم 2×2 ، $P \cdot B = 2 \times 2$ في الأعمدة . فلن P و B $2 \times 2 = 2 \times 2 + (2 \times 2)$ في (أي صف الأول في عمود الثاني) ، وبهذا نجد أن:

مصفوفة P ، B على النظم 3×2 وتكون: $P \cdot B = \begin{pmatrix} 21P & 11P \\ 22P & 12P \\ 23P & 13P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21B & 11B \\ 22B & 12B \end{pmatrix} \times$

$$\begin{pmatrix} 21B + 11B & 22B + 12B \\ 22B + 12B & 23B + 13B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21B + 11B & 22B + 12B \\ 22B + 12B & 23B + 13B \end{pmatrix}$$

مثال: اوجد $P \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-1) + (2)2 & 0 \times 1 + (1-1)2 \\ (1-1) + (2)3 & 0(1-1) + (1-1)3 \\ (1-1) + (2)4 & 0 \times 1 + (1-1)4 \end{pmatrix} =$$

ملاحظة يجب:

ملاحظة يجب التمعن جيد لا تخطئ عند ضرب الاشارات
او اجمع او الطرح او القسمة .

مثال: $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, اوجد $P \cdot B$:

$P \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, تحقق من ذلك

او جده $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, اوجد $P \cdot B$:

او جده $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, اوجد $P \cdot B$:

تطبيق المصفوفات على العمليات اليومية (الحياة)
 وصناعية : محلان لبيع الاجهزة الكهربائية :
 المحل الاول باع في أحد الاسابيع 15 تلفزيونا و 30 ثلاجة
 و 50 جهازا كمبيوتر.

فلذا سعر المبيع للمحلات مكسوبة وهو 30000 فرنك
 للتلفزيون و 150000 للثلاجة و 120000 للكمبيوتر. أكتب
 المبيعات في صورة مصفوفة من النظم 3×3 . ثم اوجد
 المصفوفة التي تبين جملة ثمن مبيعات كل محل :

الحل

لنسهل العمليات نرصد المبيعات أولا في جدول كالتالي :

الاجهزة	التمن بال
تلفزيون	30,000
ثلاجة	150,000
كمبيوتر	120,000

الاجهزة	تلفزيون	ثلاجة	كمبيوتر
المحل الاول	15	30	50
المحل الثاني	12	30	50

نحولها إلى صورة مصفوفة فالتكنج مصفوفة لمبيعات

$$\text{من الاسعار} : C = \begin{pmatrix} 30000 & 150000 & 120000 \\ 15 & 30 & 50 \\ 12 & 30 & 50 \end{pmatrix}, \text{ ثمن المبيع} = P = \begin{pmatrix} 30000 & 150000 & 120000 \\ 15 & 30 & 50 \\ 12 & 30 & 50 \end{pmatrix}$$

ويكون حاصلنا على P :

$$\text{مبيعات المحل الاول} = 6450000$$

$$\text{مبيعات المحل الثاني} = 10860000$$

وعند كتابه المصفوفة لاحظ جيداً أنه نكتبه على

صورة تكون معرفة ، مثلاً هنا كتبناه على صورة 1×3

وليس 3×1 ، معرفة وليس P ، ولا نصح أن نكتب المبيعات .

محدد المصفوفة المثلثية :

هي مصفوفة جميع عناصرها التي تحت القطر الرئيسي
او فوق القطر الرئيسي اصفار

$$\text{مثل: } \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

قيمة محدّد المصفوفة المثلثية تساوي حاصل ضرب
عناصر قطرها الرئيسي

$$\text{فمثلا: } \begin{vmatrix} 1P & 11P & 11P \\ 2P & 2P & 0 \\ 3P & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1P & 11P \\ 2P & 0 \end{vmatrix} = 1P \cdot 0 - 2P \cdot 11P$$

يمكنك التحقق من ذلك .

وعليه $1P \cdot 11P - 2P \cdot 11P = 1P \cdot 0 - 2P \cdot 11P$. وكذلك

$11P \cdot 11P - 3P \cdot 11P = 11P \cdot 0 - 3P \cdot 11P$. وعلى هذا فـ :

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 7 \cdot 3 - 2 \cdot 5 = 18$$

١- تسمى : اوحده قيمة : (حل المعادله الآتية

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 5 & 5-1 & 2 \\ 5+1 & 1 & 1-5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{الحل: } 18 - 3 \times 6 \times 1 = 18$$

$$0 = \begin{vmatrix} 5-1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 5+1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 5-1 \\ 5+1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \therefore 5$$

$$\therefore \text{ب} [(1-x)(x+1) - (1-x^2)] - 1 + 0 = [1 - x^2 - 1 + x^2] - 1 + 0 = 0$$

$$0 = (1 - x^2 - 1 + x^2) - 1 + 0 = 0$$

$$\therefore \text{ب} [(1-x)(x+1) - (1-x^2)] - 1 + 0 = 0 \Rightarrow 1 - x^2 - 1 + x^2 - 1 + 0 = 0 \Rightarrow -1 + 0 = 0 \Rightarrow -1 = 0$$

$$\text{أوجد على المعادلة} \begin{vmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{vmatrix}$$

أوجد مساحة سطح المثلث مستخدم المحددات

إذا كان المثلث إحداثيات رؤوسه:

$$S = (2, 1), V = (4, 3), E = (3, 2)$$

$$\text{الحل:} \quad M = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \text{ وباستخدام عناصر العمود}$$

$$\text{الثالث (1, 1, 1): نجد } M = \frac{1}{2} [1(4 \cdot 2 - 3 \cdot 3) - 2(1 \cdot 2 - 3 \cdot 1) + 1(1 \cdot 3 - 4 \cdot 1)]$$

$$= \frac{1}{2} [(4 \cdot 2 - 3 \cdot 3) - 2(1 \cdot 2 - 3 \cdot 1) + (1 \cdot 3 - 4 \cdot 1)] = \frac{1}{2} [(8 - 9) - 2(2 - 3) + (3 - 4)]$$

$$= \frac{1}{2} (-1 - 2 - 1) = \frac{1}{2} (-4) = -2$$

مساحة المثلث $S = |M| = |-2| = 2$ وحدة مربعة.

تصريح S ص E مثلث حيث:

$$S = (2, 1), V = (4, 3), E = (3, 2)$$

أوجد باستخدام المحددات مساحة سطح المثلث KEV

وتأكد من صحة الحل باستخدام قانون حساب

مساحة المثلث.

أوجد على أن الزقط التالية على استقامة واحدة:

$$(4, 2), (0, 3), (4, 8)$$

الحل الملاحظة

(1, 1)

الحل - ملاحظة

لأثبت أن $(1, 2), (3, 4), (5, 8)$ تقع على استقامة واحدة

$$\text{ثبت أن } 0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 5 & 8 \end{vmatrix} \therefore 0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 5 & 8 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

$$0 = (1 \cdot 2 - 0) + (3 \cdot 2 - 8) - (5 \cdot 2 - 12) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$0 = 12 - 24 + 12 =$$

النقط $\therefore$ تقع على استقامة واحدة

تمرين : أثبت أن النقط التالية على استقامة واحدة

$(4, 4), (3, 5), (8, 4)$ باستخدام المحددات .