

جمهورية السنغال
وزارة التربية الوطنية
التعليم العربي الاسلامي

مذكرة الرياضيات للسنة الأولى الثانوية

لجنة السهر
على التعليم العربي الاسلامي

تعريف النسبة:

إذا كان a, b ، عددين حقيقيين يعبران
عن كميتين من نفس النوع ولهما نفس الوحدة
فإن النسبة بينهما هي علاقة توضع مقدار
أحدهما على الآخر.

ويكتب هذه النسبة بأحد الصورتين:
 $a : b$ أو $\frac{a}{b}$ ، ونقرأ a إلى b حيث يساهم
بمقدم النسبة، ويساهم b بنال النسبة
ويساهم a, b معاً بحدي النسبة.

خواص النسبة

1. قيمة النسبة لا تتغير إذا ضرب حذاها في،
أو قسما على، عدد حقيقي لا يساوي الصفر
مثل: $a : b = ka : kb = \frac{a}{k} : \frac{b}{k}$ ، $k \neq 0$.

مثل: $6 : 9 = 2 : 3$ وذلك بقسمة حديها على 3
وكذلك بضرب حديها في $\frac{1}{3}$ أي مقلوب 3.

والنسبة $\frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{9}{10}$ وذلك بضرب مقدم النسبة
في مقلوب نالیه أو كالنالي $\frac{3}{4} \times \frac{6}{5}$ القريب مع القريب
والبعيد مع البعيد (الحسنه ص). $\frac{9}{10}$

٥ قيمة النسبة تتغير إذا أضيف إلى حديها أو طرح منها عدد حقيقي لا يساوي الصفر.
أي أن $a : b \neq a + k : b + k$ ، $a \neq 0$ ، $k \neq 0$.

مثلاً : إذا أضفنا ٥ إلى حدي النسبة ٣ : ٤ فإننا نحصل على نسبة $\frac{8}{9}$ وهي لا تساوي ٣ : ٤ .

وكذلك إذا طرحنا ٥ من حدي النسبة ٣ : ٤ فإننا نحصل على النسبة ١ : ٢ وهي أيضاً لا تساوي ٣ : ٤ .

ملاحظة عامة :

• حين نقول مثل أنه النسبة بين عددين ٥ : ٧ فلا يجوز إطلاقاً اعتباراً العدد الأول = ٥ والثاني = ٧ لأننا كما نعلم فلا : ٥ : ٧ = ١٠ : ١٤ = ١٥ : ٢١ .
 $\frac{5}{7} = \frac{7}{5} \div 1 = \frac{7}{2} : \frac{5}{2} = \frac{5}{7}$.

أي أنه حدي النسبة وهما ٥ : ٧ ربما كانا مضروبين في عدد ما قبل الاختصار .

فإذا فرضنا أنه حدي هذه النسبة كانا مضروبين في العدد الحقيقي s حيث $s \neq 0$ قبل الاختصار فيمكننا أن نعتبر حينئذ أن العدد الأول = ٥ s والعدد الثاني = ٧ s .

ملاحظة : ليس شرطاً أن يكون الرمز s فقط ولكنه جميع الأحرف الأبجدية .

وعموماً :

(وعموماً)

إذا كانت النسبة بين عددين يساوي $p : b$

فيمكننا اعتبار أنه:

العدد الأول $= p$ ، والعدد الثاني $= b$ ، حيث $b \neq 0$.

مثال 1: اوجد العدد الذي إذا أضيف إليه حدي النسبة

$\frac{17}{22}$ فإننا نحصل على نسبة $\frac{6}{7}$.

الحل: نفرض أنه العدد المطلوب $= x$

$$\therefore \frac{6}{7} = \frac{x + 17}{x + 22} \quad \therefore \frac{6}{7} = \frac{x + 17}{x + 22} \quad \therefore 6(x + 22) = 7(x + 17) \quad \therefore 13 = x$$

$$\boxed{13 = x} \quad \therefore$$

مثال 2: اوجد العدد الموجب الذي إذا أضيف مربعه

إلى مقدم النسبة $29 : 46$ وطرح مربعه من تاليها، فإننا

نحصل على نسبة $3 : 2$.

الحل: نفرض أنه العدد المطلوب هو x : x^2

$$\therefore \frac{3}{2} = \frac{x^2 + 29}{x^2 + 46} \quad \therefore \frac{3}{2} = \frac{x^2 + 29}{x^2 + 46} \quad \therefore 3(x^2 + 46) = 2(x^2 + 29)$$

$$\therefore x^2 = \dots \text{ وعليه فلا نه } x = \dots$$

مثال 3: عددان حقيقيان موجبان النسبة بينهما $5 : 2$

فإذا كانا ضعف مربع أصغرهما ينقص عنه 7 أمثال

الأكبر بمقدار 32 فأوجد العددين؟

الحل: نفرض أنه العددين هما 5 و 7
 $\therefore 7 \times \text{العدد الأكبر} - 2 \times \text{مربع العدد الأصغر} = 33$

$$\therefore 33 = 7 \times 5 - 2 \times (5 - 2)^2$$

$$\therefore 33 = 35 - 2 \times 9 \therefore 33 = 35 - 18$$

$\therefore$ العددين هما: 3 أو 5 : $\frac{11}{8}$

بالتعويض: $\frac{3}{4}$ ، $\frac{7}{8}$

ثما رينه

$$(1) \text{ إذا كان } (3 + 5) : (2 + 6) = 5 : 6$$

فأوجد قيمة 5 .

$$(2) \text{ إذا كان } (5 - 3) : (5 - 2) = 3 : 2$$

فأوجد قيمة 5 .

(3) أوجد العدد الموجب الذي إذا طرح مربعه من حدين النسبة 41 : 91 فلا يتغير $\frac{1}{3}$

التناسب

تعريف:

هو تساوي نسبتين أو أكثر.

أي أنه إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ فإنه يقال أنه a, b, c, d

كميات متناسبة، أو تكون تناسبًا ويسمى

بأول المتناسب a و b بنائبي المتناسب c و d .

بثالث المتناسب c و d برابع المتناسب a كما يسمى

a و c بطرفي التناسب، و b و d بوسطي التناسب.

ملاحظة: إذا كانت الكميات a, b, c, d متناسبة

فإن $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، فمثلاً الأعداد: $4, 7, 12, 21$ متناسبة

لأنه: $\frac{4}{7} = \frac{12}{21}$ والعددا $4, 12$ هما طرفي هذا التناسب

و $7, 12$ هما وسطيه.

الخواص:

١) إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ فإن $a \times d = b \times c$ أي أنه فليأيه

تناسب يكون حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب
الوسطيين.

مثال 1: أوجد الثالث المتناسب للكميات $2, 4, \dots, 20$

الحل: $\frac{2}{4} = \frac{3}{?}$

$\therefore 3 = 15$

مثال ٤: اوجد الرابع المتناسب للكميات
 $18\text{ م}، 12\text{ ب}، 21\text{ ب}، 18\text{ م}$.

الحل: نفرض انه الرابع هو س.

$\therefore 18\text{ م}، 12\text{ ب}، 21\text{ ب}، 18\text{ م}$.

$$\therefore \frac{18\text{ م}}{12\text{ ب}} = \frac{21\text{ ب}}{\text{س}} \dots\dots\dots$$

$$\boxed{\frac{3\text{ م}}{2\text{ ب}} = \text{س}} \text{ وعليه فانه}$$

خاصية ٤

اذا كان: $\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ فانه $2 = 3$ ، $4 = 3$ حيث ثابت

حيث م ثابت $\neq 0$.

$\therefore 1\text{ م} = 2\text{ ب}، 3\text{ م} = 4\text{ ب}$. حيث م ثابت $\neq 0$

فمثلا، اذا قيل انه $\frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ فانه $3 = 2$ ، $4 = 1$ م
 كما يمكن ان نستنتج من الخاصية (١) انه $3 = 2$ ب
 او $4 = 1$ م

مثال ٥: اذا كان $3:5 = 2:7$ فاجد النسبة $15:21$.

الحل: $\frac{3}{5} = \frac{2}{7}$ $\therefore 3 = 2$ ، $5 = 7$ حيث م $\neq 0$

وبالتعويض عند م ب بدالة م

$$\therefore \frac{1}{2} = \frac{22}{50} = \frac{32 - 60}{5 + 45} = \frac{7 - 60}{12 + 1}$$

11 ملحظة: إذا كان $a = b$ فكل من النسبات
اللاتية صحيحة: $\frac{a}{b} = \frac{1}{1}$, $\frac{a}{a} = \frac{b}{b}$, $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, $\frac{c}{a} = \frac{c}{b}$

مثال 5 إذا كان: $a - b = c$ فوجد: $a : b$

$$\text{الحل: } \therefore a - b = c$$

$$\therefore a - b - c = 0$$

$$\therefore (a - b - c) = 0$$

$$\therefore a - b = c \text{ أو } a = b + c$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{b+c}{b} \text{ أو } \frac{a}{b} = \frac{b}{b} + \frac{c}{b}$$

خاصية 5 إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots$ وكانت

$m, n, p, \dots$ أعداد حقيقية ليست جميعها أصفارا.

$$\text{فإن: } \frac{m \times a + n \times b + p \times c + \dots}{m \times d + n \times e + p \times f + \dots} = \text{أحد النسب}$$

ولتوضيح هذه الخاصية نعتبر التناسب $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15}$

فإذا مقدمات وتوالي النسبتين الأولى والثانية نحصل

$$\text{على النسبة: } \frac{6+9}{10+15} = \frac{15}{25} \text{ وهي تساوي أحد النسب}$$

التناسب المعطى.

فذلك إذا جمعنا مقدمات وتوالي النسبتين الأولى والثالثة

$$\text{نحصل على النسبة: } \frac{3+6}{5+10} = \frac{9}{15} = \text{أحد النسب المعطاة}$$

إذا جمعنا مقدمات وتوالي النسبتين الأولى والثالثة نحصل على

$$\text{النسبة } \frac{3+9}{5+15} = \frac{12}{20} = \text{أحد النسب}$$

إذا جمعنا

12
إذا جمعنا مقدمات وتوالي النسب الثلاثة فحصل على النسبة $\frac{3+6+9}{5+10+15} = \frac{18}{30}$ = احدى النسب

ولما كانت النسبة لا تتغير إذا ضرب حديها في أي عدد حقيقي خلا ف الصفر، فإذا ضربنا حديه النسبة الأولى في أي عدد مثل (2) وضربنا حديه النسبة الثانية في أي عدد آخر مثل (-4) فإنه التناسب السابق يظل صحيحا أي يكون $\frac{18}{30} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$.

فإذا جمعنا مقدمات وتوالي النسبتين الأولى والثانية فحصل على النسبة $\frac{24-18}{40-30} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ = احدى النسب.

إذا جمعنا مقدمات وتوالي النسب الثلاثة فحصل على النسبة $\frac{3+24-18}{5+40-30} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ = احدى النسب.

مثال 6: إذا كان $\frac{9}{15} = \frac{4}{6} = \frac{5}{9}$ فثبت أنه:
 $\frac{3-9-4}{5-15-9} = \frac{3}{9}$ = احدى النسب

الحل: بضرب حديه النسب الأولى في ثلاث وحده النسبة الثانية في (-5) وحديه النسبة الثالثة في (-1) ينتج أن:

$\frac{3}{5} = \frac{45}{25} = \frac{5}{9}$ وجمع مقامات وتوالي النسب الثلاثة في التناسب الآخري ينتج أنه: احدى النسب = $\frac{3-45-5}{5-25-9} = \frac{3}{9}$ هو المطلوب

تصاريح

13/ نصارى بين ذاك ان $\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ فلا $m = 1, \dots, b = \dots$
 - اذا كان: $\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ فلا $m = \frac{1}{3}, \dots$

م اذا كان: $3 - 2 = 10 - 7 = 3$ حيث $0 \neq 3$
 ص د ح، $0 \neq 3$ فاوجد النسبة $b : c$

التناسب المتسلسل

تعريف : يقال ان الكميات a, b, c في تناسب

$$\text{متسلسل ما اذا كان: } \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

في هذا التناسب يسمى : a بالاول المتناسب، c بالتالي المتناسب، اما b فهو الوسط المتناسب، او الوسط الهندسي بين a, c .

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow b^2 = ac, \text{ اي ان الوسط}$$

المتناسب بين كميتين يساوي جذر حاصل ضرب الكميتين
 لاحظ ان الكميتين a, c يجب ان تكونا موجبتين معا
 او سالبتين معا.

فمثلا الاعداد $9, 6, 4$ تكون تناسبا متسلسلا لان
 $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$ او $4 \sim 6 : 9$ حيث : 6 هو الوسط المتناسب
 4 الاول المتناسب، و 9 الثالث المتناسب

مثال : اوجد الوسط المتناسب بين كل من الكميتين .
 $(1, 5, 20)$. $(2, \frac{m(m-b)}{b}, \frac{m^2 - p^2}{m-p})$

الحل :

الحل

الحل : ١) الوسط القتناسب يساوي $\pm = \sqrt{100 \times 50} = \pm 70.71$

$$2) \text{ الوسط القتناسب } = \pm = \sqrt{\frac{(b+p) \times p \times 10}{b-p} \times \frac{(b-p) \times p \times 3}{b+p}}$$

$$\pm = \sqrt{36 \times 5} = \pm 4.24$$
 وهو المطلوب .

مثال : اوجد الثالث القتناسب بين كل من العميتين
 ١٨، ١٢ (١) $9 - 3 \times 6$ ، $6 - 3 \times 2$

الحل ١) نفرض انه الثالث القتناسب هو ج

$$\therefore \frac{18}{9} = \frac{12}{6} = \frac{6}{3} = 2$$

الحل ٢) نفرض انه الثالث القتناسب هو س .

$$\therefore \frac{9 - 3 \times 6}{3} = \frac{6 - 3 \times 2}{3}$$

$$\therefore \frac{9 - 18}{3} = \frac{6 - 6}{3} \Rightarrow \frac{-9}{3} = \frac{0}{3} \Rightarrow -3 = 0$$

ملاحظة : اذا كانه p, b, c في تناسب متسلسل وفرضنا

$$انه : \frac{p}{b} = \frac{b}{c} = m \text{ (مثلا) .}$$

$$\text{فبما انه } \frac{p}{b} = m \therefore b = \frac{p}{m} \text{ ①}$$

$$\frac{b}{c} = m \therefore b = m \times c \text{ وبالتعويض عن ب من ①}$$

$$\therefore m \times c = m \times p \therefore c = p \text{ ②}$$

$$\text{اي اذا كانه } \frac{p}{b} = \frac{b}{c} = m \text{ فلانه } b = \frac{p}{m} \text{ ① و } c = p \text{ ②}$$

مثال : اذا كانه p, b, c في تناسب متسلسل فاثبت انه :

$$\frac{p}{b} = \frac{b - 3}{c - 4}$$

الحل

الحل : نفرض انه $\frac{p}{q} = \frac{c}{d} = m$

$$\therefore c = d \cdot m, \quad p = q \cdot m$$

$$m = \frac{(3-4p)4q}{(3-4p)4q} = \frac{4q^2 - 4p^2}{4q^2 - 4p^2} = \frac{q^2 - p^2}{q^2 - p^2}$$

$$\textcircled{2} \quad m = \frac{q^2 - p^2}{q^2 - p^2} = \frac{p}{q}$$

$\therefore$ ص ① ، ينتج المطلوب .

مثال 4 : اذ الكات ب و س في متناسب بين p ، فثبت

$$\text{أن : } \frac{p}{p+q} = \frac{p}{m} \quad , \quad (1) \quad p - q = (p+q)(p-q)$$

الحل : بما أن : ب و س متناسب بين p ،

$\therefore p$ و q متناسب متسلسل

نفرض انه $\frac{p}{q} = \frac{c}{d} = m$ فانه $c = d \cdot m, \quad p = q \cdot m$

$$\textcircled{1} \quad \frac{1-p}{m} = \frac{(1-m)q}{q^2} = \frac{q - q^2}{q^2} = \frac{p - p^2}{p^2}$$

$$\text{و} \quad \frac{(1-m)q}{(1+m)q} = \frac{q - q^2}{p + p^2} = \frac{p - p^2}{p + p^2}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{1-p}{m} = \frac{(1+p)(1-p)q}{(1+p)p} =$$

ص ① ، ينتج المطلوب بالاول .

$$(1) \quad (1-m^3)x = x - m^3x = x - (m+x)x = x - x - mx = -mx$$

$$ق: (b-a)(a+b+m) = (a+b+m)(a-m) = (a+b+m)(a-m)$$

$$(1+m+m^2)(1-m)x = (1+m+m^2)x \times (1-m) =$$

$$(2) \quad (1-m^3)x =$$

مع (1)، ينتج المطلوب الثاني.

على العموم:

الكميات $a, b, c, m, \dots$

تكون في تناسب متسلسل إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \dots$

فمثلا: 16, 24, 36, 54 في تناسب متسلسل لأن

$$\left(\frac{2}{3} = \text{كل نسبة}\right) \frac{36}{54} = \frac{24}{36} = \frac{16}{24}$$

ملاحظة: إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \dots$

$$\text{فإن: } a = b, b = c, c = d, \dots$$

مثال: إذا كانت a, b, c, m في تناسب متسلسل

$$\text{فأثبت أن: } \frac{b-a}{a+b+m} = \frac{c-b}{b+c+m}$$

الحل: نفرض أن: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \dots$

$$\therefore a = b, b = c, c = d, \dots$$

$$= \frac{(1+m+m^2)a}{(1-m^3)a} = \frac{a + ma + ma^2}{a - ma^3} = \frac{a + b + c}{a - b}$$

$$\frac{a}{1-m} = \frac{(1+m+m^2)a}{(1+m+m^2)(1-m)}$$

$$\frac{b-a}{a+b+m}$$

17

$$\frac{(1-p)q}{(1+q-q^2)(p)} = \frac{q-p^2}{p+q-p^2} = \frac{1-p}{1-q-p}$$

$$\cdot \frac{q}{1-p} = \frac{(1-q)q}{q(1-q)} =$$

تعاريف

(1) الثالث العتاسب للكميتين q ، p هو
 (2) اذا كانت الوسط العتاسب بين q ، p هو 8

فلان: $p = \dots$

(3) اذا كانت: 7، p ، $\frac{1}{q}$ في تناسب متسلسل

فلان: $p = \dots$

التغير

التغير الطردى: اذا كان 1 كغ سكر يبلغ 300 فرنك فلان: q كغ = 600

نلاحظ انه كلما زادت الكمية ازادت الثمن طبعاً
 لهما، وهذه العملية تسمى تناسباً طردياً.

والعكس تكون تناسباً عكسياً فمثلاً
 كلما زادت الوزنة وتقلصت الثمن تكون
 تناسباً عكسياً.

أمثلة: (1) التناسب الطردى:

اذا كان p

(18)

إذا كانت S تناسب ترديا V فإنه يكتب ربا ضيا
 $S = \frac{1}{V}$ ، وإن كانت عكسيا $S = \frac{1}{V^2}$.

ملاحظة: إذا كانت S تناسب ترديا مع V فإنه:

$$S = M \times V, \text{ ومنه } M = \frac{S}{V}$$

مثال: إذا كانت $S = \frac{1}{V^2}$ ، $V = 4$ عندما $S = 8$.

أوجد S عندما $V = 32$.

الحل سر $V = S$ $\therefore S = M \times V$

$$\therefore S = 4 \text{ عندما } V = 8 \therefore 8 = 4 \times M \therefore 8 \times M = 4$$

$$\text{ومنه } M = \frac{4}{8} \therefore M = \frac{1}{2}$$

$$\therefore S = 32 \times \frac{1}{2} \therefore S = 16$$

أو نفرض $S = 1$ ، $V = 4$ ، $V = 8$ ، $S = ?$ ، $V = 32$

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{V^2} \therefore \frac{1}{S} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} \therefore S = 16$$

$$\therefore \frac{1}{S} = \frac{1}{32^2} = \frac{1}{1024} \therefore S = 1024$$

مثال

إذا كانت S ، V كميتين متغيرتين ترتبطان
 علاقة التغير الترددي يمكن التمثيل البياني لهما
 بـ خط مستقيم.

إذا كانت العلاقة بين S ، V في مثلها يبا
 خط مستقيم. أما العلاقة بين S ، V في مثلها
 يبا يبا منحنى.

مثال إذا كانت S

(19)

مثال: إذا كانت M مصفوفة متغيرة حيث $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$
واخذت M القيمة 18 عندما أخذت M القيمة 2.
فأوجد العلاقة بين M و M ثم أوجد قيمة M
عندما $M \in \{3, 2, 1, 0\}$

في المرحلة الأساسية من التعليم، سبعة أمثلة من هذه العملية المسمى بالنسبة المئوية، لذلك خشيته التطويل نقوم بوضع بعض الوضعيات والإجابات عليها ووضع أنشطة من واقع الحياة التي نحن نعيشها يومياً وضعها:

تاجر قرر أن يربح من كل بضاعة يبيعها 30% من ثمن الشراء. ما هو الربح الذي سيحققه من بيع بضاعة اشتراها بـ: 50^F، 120^F، 4500^F، 50000^F، 145^F.
ملاحظة: استعمال الجدول التناسبية تسهل وتوضح الحدود الناقصة

الربح	30								
التمن	100	50	120	4500	50000	145	800	135	

نلاحظ هنا أننا نبحث عن الأعداد المناسبة لهذه الأشياء الربح: $\frac{30}{100} = \frac{3}{10}$ ، بالتبسيط. إذن: $15^F = 50 \times \frac{3}{10}$
 $36^F = \frac{3}{10} \times 120$

التمن: $\frac{100}{50}$ بالتبسيط $\frac{100}{50} = 800 \times \frac{10}{3} = 2666,66^F$

أكمل باقي الجدول

91

أ. حساب النسبة المئوية لقيمة معينة هو البحث عن حد ناقص مرافق لمئة.

مثال: بائع يحمل في مدينة ما على 30 فرنك من ثمن صحيفة يبيعها بـ 200 فرنك.

ما هي النسبة المئوية التي يحمل عليها من بيع هذه الصحيفة

الحل: نبحث عن المجهول ليكن (P)

$$\therefore \frac{30}{200} = \frac{P}{100} = P = \frac{30}{200} \times 100 = 15$$

$\therefore$ النسبة المئوية هي 15.

ما هو الربح الذي سيحققه إذا باع 3600 فرنك من الصحف؟

الحل: عند ما تكون النسبة المئوية معلومة فلا جدوى لجدول النسب.

$$\therefore 15\% = \frac{15}{100} \times 3600 = 540 = 3600 \times 912 = 540 \text{ فرنك}$$

أو 36×15 . (تخلصاً من الأصفار)

ملاحظة: باستخدام الجدول التناسبية ليس ضرورياً عند ما تعرف عدة طرق، لا عليك إلا اختيار الأسر والانسب بالنسبة إليك.

تعاريف.

(1) القول السوداني

تمارين

١ الفول السوداني يعطي في المتوسط 32% من وزنه زيتا، ما هو وزن الفول الضروري للحصول على 200 ل من الزيت.

ملاحظة: 1 لتر يساوي 1 كغ.

٢ ما الرأس المال الذي إذا وضع بفائدة 4,5% سنويا يعطي 124000 فرنك. كفايدة؟

٣ وضع مبلغ 34500 فرنك في مصرف فكان نصفه بفائدة 4,5% شهريا، والنصف الآخر بفائدة قدرها 5%، ما هو الفائدة السنوية التي يدرها هذا المبلغ؟

٤ توفي رجل عن 3 أولاد و 5 بنات وترك 980100 فرنك وزعم المبلغ على الورثة علما أن للرجل ضعف ما للمرأة.

المعادلة من الدرجة الاولى بمجهول واحد

الخواص:

ليكن a, b, c أعداد حقيقية

- كل معادلة من الدرجة الاولى بمجهول واحد (س) يمكن تحويله الى معادلة هو $s = \frac{c}{a}$.

طريقة الحل

لتحويل معادلة الى شكل: $as = b$ نجمع وحيدات الحد التي تشمل س على اليسار للمساواة، ووحيدات الحد الاخرى على يمين المساواة.

مثال 1:

حل المعادلة: $3s + 2 = 2 + 3s$
نطرح (2-) من طرفي المساواة

$$3s + 2 - 2 = 2 + 3s - 2$$

$$3s = 0$$

$$3s = 0$$

نضرب الطرفين في $\frac{1}{3}$: $\frac{1}{3} \times 3s = \frac{1}{3} \times 0$
 $\therefore s = 0$

$s = \frac{1}{3}$ هي القيمة العددية للمجهول س
مما أجلبها تتحقق المعادلة.

مثال 2

حل المعادلة: $\frac{5}{3}x - 4 = 5$

نضرب طرفي المعادلة في مقلوب $\frac{3}{5}$ وهو $\frac{3}{5}$

$$\frac{3}{5} \times \frac{5}{3}x - 4 = 5 \quad \therefore \quad \frac{3}{5}x - 4 = 5$$

برهان: $\frac{5}{3}x - 4 = 5 \quad \therefore \quad \frac{5}{3}x = 9$ ومنه نستنتج أن $\frac{5}{3}x$ هو حل المعادلة.

معادلة من الشكل:

$$0 = (px + b)(qx + c)$$

خواص:

مهما يكن العددين p, q

إذا كان: $0 = px + b$ ، إما $0 = qx + c$ أو $0 = px + b$.

حلول المعادلة: $0 = (px + b)(qx + c)$ هو حل

كل من المعادلتين: $0 = px + b$ أو $0 = qx + c$

مثال: حل المعادلة: $0 = (x + 7)(x - 8 - 9)$

نحل المعادلة: $0 = x + 7$

$$x = -7$$

نحل المعادلة: $0 = x - 8 - 9$

$$x = 17$$

$$x = \frac{9}{8}$$

ومنه حلول المعادلتين من الدرجة: $\left\{ \left(\frac{9}{8}, -7 \right) \right\}$

نظام معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

25

مثال:
$$\begin{cases} (1) \quad 3س + 2ص = 1 \\ (2) \quad 4س + 5ص = 2 \end{cases}$$
 إنها مسألة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين $س$ و $ص$.

من أجل $س = 1$ و $ص = 2$ المعادلتين (1) و (2) محققتان.

$$(1) \quad 3 \times 1 + 2 \times 2 = (3) + (4) = 7 \neq 1$$

$$(2) \quad 4 \times 1 + 5 \times 2 = (4) + (10) = 14 \neq 2$$

نقول إذ ذم أن التنايئة $(1, 2)$ ليست حلاً للمعادلة،
بينما التنايئة $(1, 2)$ حل للمعادلة (النظام)
تشبه: في تنايئة عديدة الترتيب هام جداً -

حل نظام معادلتين

- طرق حل نظام معادلتين

1/ طريقة الحل بالتعويض:

تهدف هذه الطريقة إلى استخراج أحد المجهولين من إحدى المعادلتين ثم التعويض في الأخرى.
مثال: حل نظام المعادلة الآتية:

$$(1) \quad 3س + 2ص = 1$$

$$(2) \quad 4س + 5ص = 2$$

المعادلة (2) نسمع بكتا بتها: $ص = 2 - 4س$
نعوض: $ص = 2 - 4س$ في (1) فنجد

$$3س + 2(2 - 4س) = 1$$

$$3س + 4 - 8س = 1 \Rightarrow -5س = -3 \Rightarrow س = \frac{3}{5}$$

$$س = 1$$

نعوض $س = 1$ في $ص = 2 - 4س$ ونجد

$$ص = 2 - 4 \times 1 = -2$$

$$ص = -2 \quad 4 - 8 = -4 \quad 4 - 8 = -4$$

طريقة
ب/ التحد

ب / طريقة التحل بالجمع
تهدف الى جعل معاملي (س) و (ع) متعاكسين ثم

26

مثال: $1) \quad 3س + 2ع = 1$

$2) \quad 4س + 5ع = 8$

نضرب المعادلة الأولى في معامل (ع) في المعادلة الثانية
وهي (1) ونضرب المعادلة الثانية في معامل (س) في المعادلة
الأولى وهي (-2) أو في أي مقدارين

ونجد: $3س + 2ع = 1$

$-8س - 10ع = -16$

$3س - 8س + 2ع - 10ع = 1 - 16$

$-5س = 0 + 15$

$\therefore س = 1$

نقوم بنفس الطريقة بجعل هذه المرة معاملي (س) متعاكسين.
إذا أخذنا (-4) في المعادلة الأولى و (3) في الثانية.

$1) \quad 3س + 2ع = 1$

$2) \quad 4س + 5ع = 8$

نجد: $4 = (-8س) + 12س$

$6 = 3س + 12س$

$\therefore -12س + 12س + 3س + 4س = -8 + 40$

$10 = 5س$

$\therefore س = \frac{10}{5} = 2$

النتيجة (1، 2) هو حل للنظام.

ملاحظة

إننا نجد نفس الثنائية باستعمال
طريقة الحل بالتعويض أو طريقة الحل
بالجمع، إذ أن الطريقة هي عملية اختيارية.
يمكن استعمال طريقة الجمع لإيجاد أحل المجهولين
ثم التعويض في أحدهما لإيجاد المجهول الثاني.
مثال:

① $3x + 2y = 1$ ② $2x + y = 2$
تلاحظ بتوظيف طريقة
الجمع مثلا وجدنا $1 = 3x + 2y$ ، نعوض $1 = 2x + y$ في المعادلة
الاولى أو في المعادلة الثانية.

مثلا في (1) $\therefore 1 = 3x + 2(2 - 2x)$

$$1 = 3x + 4 - 4x$$

$$2 - 2x = 3x + 4 - 4x$$

لاحظ أننا نجد نفس الثنائية (1، 2).

التمثيل البياني

28

التمثيل البياني

لحل الجملة السابقة: $\begin{cases} 1 - 3 = 2 + 1 \\ 2 = 1 + 4 \end{cases}$

يمكن كتابتها: $1 - 3 = 2 + 1$ (1)

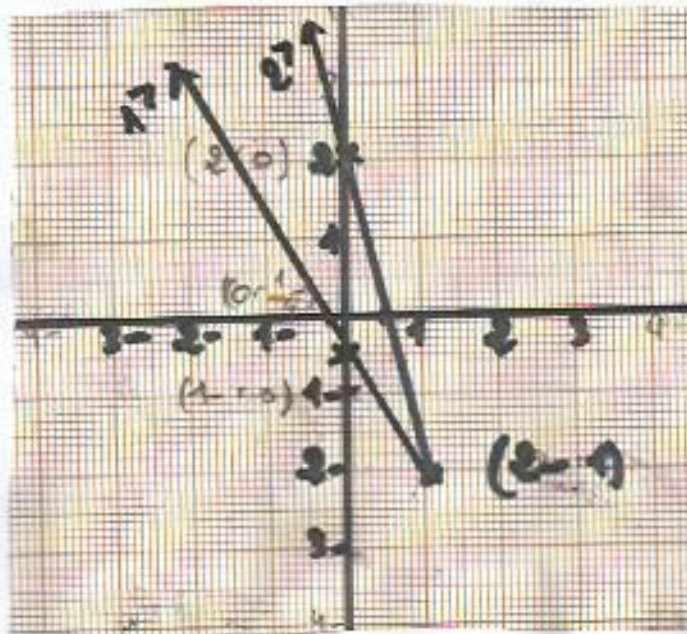
(2) $2 = 1 + 4$

$$\therefore 1: 0 = 1 \therefore 0 = 1$$

$$0 = 1 \therefore 1 = 0$$

$$2: 0 = 1 \therefore 0 = 1$$

$$0 = 1 \therefore 1 = 0$$



المترجحات من الدرجة الاولى

٩٥

بمجهول واحد

خواص: P, b, c , اعداد حقيقية:

إذا كان: $0 < P, b > c$ فإن: $P > b > c$

إذا كان: $0 > P, b > c$ فإن: $P < b < c$

المعادلات والمتباينات

- معادلات الدرجة الاولى في متغيرين

كل معادلة يمكن ان تكتب على صورة:

$$ax + by + c = 0 \text{ حيث } a, b, c \text{ اعداد حقيقية و } a, b \text{ لا يكونان صفرين}$$

تدعى معادلة درجة ثانية في متغيرين
وعادة يرمز لمجموعة حل المعادلة كالتالي:

$$H = \{(x, y) \mid ax + by + c = 0\}$$

$$ax + by + c = 0$$

A - أمثلة:

1. إذا كان مجموع عددين حقيقيين هو (12)

فما هو هذين العددين.

الجواب: نفرض ان العددين هما (x, y)

$$x + y = 12$$

بإيجاد احد المتغيرين يتحول الى معادلة من

الدرجة الاولى بمتغير واحد او المعادلة المختصرة

وبها نتوصل الى $x + y = 12$

ولهما حل وصيد وهو: $P = 2$

في مثل هذه المعادلة تكون لدينا ثلاثة عشر زوج من الحلول تحقق هذه المعادلة.

2 - عددان مجموعهما $= (7)$ عنيهما ؟

الحل: لماذا فرضنا a وهما c والثاني k

$\therefore c + k = 7 \therefore \{c\}$ عبارة عن ثمانية أزواج من

الأعداد .

أو أن مثل هذه المعادلات لها مجموعة غير منتهية من الحلول .

نظام معادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين

لماذا كان (معادلتين مجموعة الحل نفسها ومجموعة التعويض نفسها، فإنهما يشكلان نظاما متكافئا، كما نسميها المعادلات الآتية:

نأخذ من هذا أن كل معادلتين تشكلان نظاما متكافئا، لماذا طبقا الشرطين التاليين:

أ/ لهما نفس مجموعة التعويض

ب/ لهما نفس مجموعة الحل .

طرق الحل:

هناك ثلاث طرق مختلفة تستعمل لحل المعادلات الآتية من الدرجة الأولى .

(1) طريقة العذف:

فيها تستخدم الجمع أو الطرح للتخلص من أحد المتغيرين وصولاً إلى معادلة مفردة.

مثلاً: $\begin{cases} 7 = 2x + 3y \\ 4 = x - y \end{cases}$ أو جد حل النظام:

الحل: بضرب المعادلة الأولى في (1) والثانية في (2) تصبح المعادلتين:

$$7 = 2x + 3y$$

$$8 = 2x - y$$

بالجمع نحصل على: $4x = 15$ وعليه: $x = \frac{15}{4}$
وإذا عوضنا x بقيمته في المعادلة الثانية
ماذا نحصل؟ أكمل الحل.

نأخذ من هذا أنه طريقة الحذف تقوم على جعل أحد المتغيرين من المعادلة الأولى يساوي المتغير الآخر في المعادلة الثانية والتخلص منها إما بالجمع أو بالطرح.

2- طريقة التعويض:

وفيها نقل أحد المتغيرين بدلالة الآخر من المعادلة الأولى، ثم نعوض الناتج عن نفس المتغير في المعادلة الثانية.

مثلاً: $\begin{cases} 4 = x + 3y \\ 7 = x - y \end{cases}$

(33)

الحل البياني:

لتمثيل المعادلة: $5x + 2y = 10$ نجد أنه: $2y = 10 - 5x$ وبفرض قيم للمتغير x نحصل على قيم y كما في
الجدول التالي:

x	$2y = 10 - 5x$	y
2	$2y = 10 - 5(2)$	0
1	$2y = 10 - 5(1)$	5

وبالتالي نوجد نقط المعادلة الثانية بنفس

المنحنى ونرسم المستقيمين اللذين تمثلانه

المعادلتين ونعين نقطة تقاطعهما

والتي هو حل نظام هاتين المعادلتين.

- اكمل الحل وبعين نقطة التقاطع للمستقيمين.

المتراجعات من الدرجة

المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد.
(1) تعريف:

(34)

a, b, c من أعداد حقيقية

كل متفاوتة على شكل $a + b + c > 0$ أو $a + b + c \leq 0$
أو $a + b + c > 0$ أو $a + b + c \geq 0$

تسمى متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد هو x .

(2) أمثلة:

المتفاوتات: $2x + 5 > 0$ و $x - \frac{1}{2} \leq 11$ و $0 \leq 3 + x$
تسمى متراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد هو x .
ملاحظة هامة:

الأعداد الحقيقية التي تحقق متراجحة تسمى حلول لهذه المتراجحة.

(3) حل متراجحة:

(1) - حل المتراجحة: $0 > 2 + 3x$

المتراجحة $0 > 2 + 3x$ تكافئ على التوالي:

$$3x > -2 \quad \Leftrightarrow \quad x > -\frac{2}{3}$$

الأعداد الحقيقية الأصغر قصفا من $-\frac{2}{3}$ هي حلول المتراجحة $0 > 2 + 3x$

(2) حل المتراجحة: $2 - x \geq 4 + 7x$

المتراجحة $2 - x \geq 4 + 7x$ تكافئ على التوالي:

$$-x - 7x \geq 4 - 2 \quad \Leftrightarrow \quad -8x \geq 2$$

$$-3x - 2 \geq 4 \quad \Leftrightarrow \quad -3x \geq 6 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -2$$

الأعداد الحقيقية

الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي 2

هي حلول المتراجحة: $3 - s \geq 4 + 2 - s$

* / تمثيل الحلول على مستقيم عددي:

(35)



التمارين: ما هو العدد الذي ضعفه زائد ثلاثة أكبر أو يساوي 15 ؟

ج - ما هو العدد الذي ثلاثة أمثاله ناقص 3 $\leq \frac{1}{3}$ ؟

ج - ما هو العدد الذي إذا قسم على ثلاثة وأضيف إليه 3 كانت النتيجة $\leq \frac{1}{3}$

الحلول

1 - نفرض أن العدد هو s

$$2s + 3 \leq 15$$

$$2s \leq 15 - 3$$

$$2s \leq 12 : s \leq \frac{12}{2} = 6$$

$$\boxed{s \leq 6}$$

2 - العدد s

2. العدد s ثلاثة أمثاله $= 3s$

(36)

$$s - 3 \leq \frac{1}{8}$$

$$3 + \frac{1}{8} \leq s$$

$$3s \leq \frac{25}{8} \Rightarrow \frac{24+1}{8} \leq 3s \Rightarrow \frac{25}{8} \leq 3s \Rightarrow \frac{25}{24} \leq s$$

$$\boxed{s \geq \frac{25}{24}}$$

3. نفرض العدد s

$$\frac{1}{3} \leq 8 + \frac{s}{3}$$

$$\frac{1}{3} \leq 8 + \frac{s}{3} \Rightarrow 8 - \frac{1}{3} \leq \frac{s}{3} \Rightarrow \frac{23}{3} \leq s$$

$$\boxed{s \geq \frac{23}{3}}$$

37 المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة

تقاطع مستقيمين معلومين

إذا كانا a و b نقطتين معلومتين يمكن أن يمرّ بهما خط
 لا نهائي من المستقيمات .
 ∴ المعادلة التي تمثل جميع المستقيمات المارة
 بنقطة تقاطع المستقيمين .

$$a = 1x + 2y + 3z \quad , \quad b = 4x + 5y + 6z$$

$$\text{هــي: م} (a = 1x + 2y + 3z) + \text{ك} (b = 4x + 5y + 6z) = 0$$

① $m \geq 0, k \geq 0$

ففي حالة $m = 0$ نتج معادلة المستقيم الثاني
 وفي حالة $k = 0$ نتج معادلة المستقيم الأول
 أما إذا كان $m = 0, k = 0$ فنتج معادلة $a = b$ مستقيم
 يمرّ بنقطة التقاطع ، خلاف المستقيمين الأصليين
 ويمكن في هذه الحالة وضع المعادلة ① على الصورة:
 $a = 1x + 2y + 3z + 4x + 5y + 6z = 0$ ② .

مثال اوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-1, 0)$
 ونقطة تقاطع المستقيمين:

$$a = 4x + 5y + 6z \quad , \quad b = 5x - 2y + 3z$$

الحل: يمكن أن نوجد نقطة تقاطع المستقيمين

وهي $(1, 1)$

38 وهي (2,1) ثم إيجاد معادلة المستقيم المار
بالنقطتين (2,1) ، (0,1-)

بطريقة أخرى:

المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع
المستقيمين المعلومين بخلافهما هي:

$$y = x - 5 + k \quad (2 - x + 4) = 0$$

(0,1-) تقع على هذا المستقيم $\therefore$ فهي تحقق المعادلة.

$$\therefore -1 + 5 - k = (2 - 0 + 4) = 0$$

$$-6 + k = 0 \quad \therefore k = 6$$

$$\therefore y = x - 5 + 6 \quad (2 - x + 4) = 0$$

$$y = x - 5 + 6 = 1 + x$$

$$7 - x + 7 = 0 \quad (\text{بالقسمة على 7})$$

$$\therefore y = x + 1$$

تمارين

أثبت أن المستقيمين: $y = 4 + x$ و $y = 14 - x$

$$4 + x + 5 = 0 \quad \text{متعامدان}$$

ثم أوجد: (م) نقطة تقاطع المستقيمان

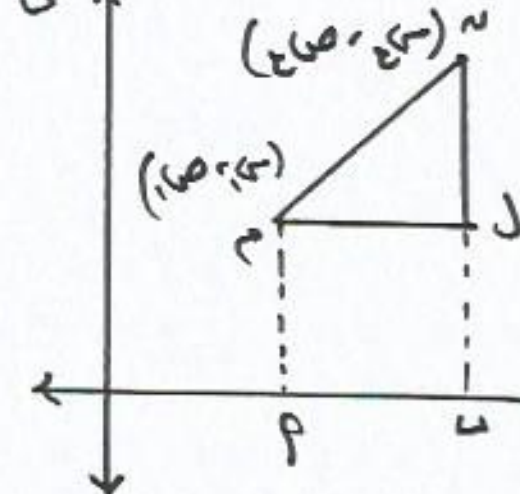
(ب) معادلة المستقيم الذي يمر بنقطة

التقاطع والنقطة (2,1).

البعد بين النقطتين:

(39)

نفرض أنه $m = (s_1, s_2)$ ، $n = (s_1, s_2)$ نقطتين
في المستوى في الشكل المقابل:



$$n = l - b = s_1 - s_2 = \dots \text{ ①}$$

بالمثل

$$l = m = s_1 - s_2 = \dots \text{ ②}$$

المثلث $m = n$ قائم الزاوية في l

$$\therefore (m)^2 = (s_1 - s_2)^2 + (s_1 - s_2)^2$$

$$\therefore m = n = \sqrt{(s_1 - s_2)^2 + (s_1 - s_2)^2}$$

أي أن: البعد بين نقطتين = مربع فرق السينات مطروحا
منه مربع الفرق الصادات.

مثال:

أوجد البعد بين النقطتين $m = (3, 2)$ ، $n = (12, 8)$

$$m = n = \sqrt{(s_1 - s_2)^2 + (s_1 - s_2)^2} = \sqrt{(3 - 12)^2 + (2 - 8)^2}$$

$$\therefore m = n = \sqrt{81 + 36} = \sqrt{117} = 9\sqrt{13}$$

مثال 2:

اثبت أنه النقط $p = (0, 7)$ ، $b = (6, 7)$ ، $h = (6, 1)$
هي رؤوس مثلث قائم الزاوية وأحسب مساحته.

الحل:

$$6 = \sqrt{2(0-6) + 2(7-7)} = 0P$$

$$8 = \sqrt{2(6-6) + 2(7-1)} = 0H$$

$$10 = \sqrt{100} = \sqrt{36+64} = \sqrt{2(6-0) + 2(1+7)} = 0H$$

$$100 = 64 + 36 = 2(0H) + 2(P), 100 = 2(P) \therefore$$

$\therefore$ المثلث $0H-P$ قائم الزاوية في H .

$$\therefore \text{مساحته} = \frac{1}{2} \times 0H \times P = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24 \text{ وحدة مربع}$$

مثال 3:

اثبت أن المثلث الذي رؤوسه النقط الآتية:

$$P = (5, 1), H = (0, 4), 0 = (6, 5) \text{ متساوية الضلعين}$$

الحل

$$0P = \sqrt{2(5-0) + 2(1+4)} = 0H$$

$$0H = \sqrt{2(0-6) + 2(4-5)} = 0P$$

$$0P = \sqrt{2(5-6) + 2(1+5)} = 0H$$

$$\therefore 0H = 0P \text{ مثلث متساوي الساقين حيث } 0H = 0P$$

مثال 4:

اثبت أن النقاط $P(5, 1), H(0, 4), 0(6, 5)$ رؤوس شبه منحرف.

$$\text{الميل } 0P = \frac{0-4}{1+7} = \frac{1}{2}$$

$$\text{الميل } 0H = \frac{8-6}{5-1} = \frac{1}{2} \therefore 0P \parallel 0H \leftarrow \text{①}$$

$$0P = 0H \therefore$$

41

$$\textcircled{2} \leftarrow \sqrt{5} \sqrt{4} = \sqrt{4+8} = \sqrt{(0-4)+^2(4+8)} = 0 \quad \therefore$$

$$\textcircled{3} \leftarrow \sqrt{5} \sqrt{2} = \sqrt{(2-)+^2(4-)} = \sqrt{(8-6)+^2(5-1)} = 2$$

$\therefore$ من (2, 3) $\sqrt{5} \neq 2$

و عليه جاء الشكل $\sqrt{5}$ شبه منحرف.

مثال 4:

أثبت أنه النقط $P(0,0)$, $B(8,4)$, $C(11,6)$ تقع على استقامة واحدة

الحل

$$\sqrt{13} \sqrt{2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{(8-0)+^2(4-0)} = 0 \quad P$$

$$\sqrt{13} \sqrt{1} = \sqrt{9+4} = \sqrt{(11-3)+^2(6-4)} = 0 \quad B$$

$$\sqrt{13} \sqrt{3} = \sqrt{81+36} = \sqrt{(11-0)+^2(6-0)} = 0 \quad C$$

$\therefore P = 0 + 0 + 0$. الثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة

(42)

مقياس الرسم / الرسم

إذا اردنا رسم بلد او قرية أو أي شيء على الورقة لا يمكنه رسمه ، لماذا؟
لأنه لا توجد ورقة طولها متر أو كيلومتر
ولذلك نأخذ مقياس المناسب للأطوال
والشرط أن يكون النسبة بين الصورة
والطول الحقيقي بنفس الوحدة والنوع
والكمية.

أوجد النسبة بين 1 م إلى 1 سم.

$\frac{1 \text{ م}}{1 \text{ سم}}$ كميتين مختلفتين في النوع فلا بد
من التحويل إما إلى سم أو إلى متر.

$$1 \text{ م} = 100 \times 1 = 100$$

$$\frac{100}{1} = 100$$

أوجد 1 م إلى 5 كم.

$$\frac{1 \text{ م}}{5 \text{ كم}} = \frac{1}{5000} = 1:5000$$

إذا كان طول رجب 1,5 م ونريد رسمه على
الورقة طوله 4 كم أوجد مقياس الرسم
الكل

(43)

الحل:

القاعدة: مقياس الرسم = $\frac{\text{طول الصورة}}{\text{طول الحقيقي}}$

$$\text{مقياس الرسم} = \frac{1,5}{45} = \frac{1,5 \times 100}{45}$$

$$\frac{1,5 \times 100}{45} = \frac{150}{45} = \frac{10}{3} = \frac{6}{9} = \frac{30}{45} = \frac{120}{180} = \frac{10 \times 12}{45}$$

القاعدة

للحصول على مقياس الرسم نقسم الطول للصورة
على الطول الحقيقي.

مثل: مقياس الرسم = $\frac{\text{طول الصورة}}{\text{الطول الحقيقي}}$

طول الصورة = الطول الحقيقي $\times$ مقياس الرسم.
طول الحقيقي = $\frac{\text{طول الصورة}}{\text{مقياس الرسم}}$

تمارين

① اوجد الطول الحقيقي:

إذا كان طول الصورة = 3,5 كم.

ومقياس الرسم = 1 : 3000

② اوجد بعد الصورة إذا كان مقياس

الرسم =

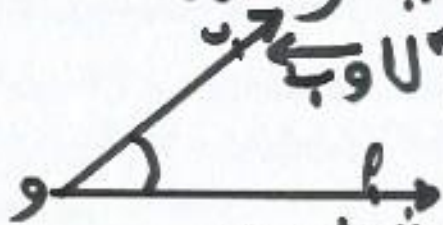
الرسم = 2 : 5000 ، وطول الحقيقي
يساوي 300 م .

ج) اوجد مقاييس الرسم للخريطة اذا كان
طول المدينة المرسومة داخل الخريطة
يساوي 3 ملم والصورة للمدينة = 600 كم .

طرق قياس الزوايا

(45)

نعلم ان الزاوية هي شكل هندسي عبارة عن اتحاد شعاعين لهما نقطة بداية واحدة. فالزاوية $\angle \text{ب و ا}$ هي $\angle \text{ب و ا}$ هي $\angle \text{ب و ا}$



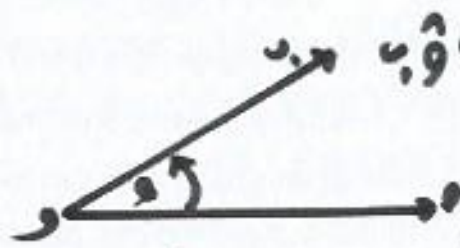
الزاوية الموجهة

هي زوج مرتب من شعاعين هما ضلع الزاوية $(\text{و م}, \text{و ن})$ أو $(\text{و ن}, \text{و م})$.

نسمي أحد ضلعي الزاوية الموجهة بالضلع الابتدائي والضلع الآخر هو الضلع النهائي. وينتج عن ذلك ان الزاوية الموجهة لها قياسان احدهما موجب والآخر سالب

قياس الزاوية الموجهة

١) القياس الموجب: الزاوية الموجهة $\angle \text{ب و ا}$ هي الزوج المرتب $(\text{و م}, \text{و ن})$



حيث و م هو الضلع الابتدائي (نوضع عليه حافة المنقلة) ويكون اتجاه قراءة المنقلة من و م الى و ن ويكون قياس الزاوية عددا موجبا (هـ)

٢) القياس السالب: الزاوية الموجهة $\angle \text{ب و ا} = (\text{و ن}, \text{و م})$



هو $\angle \text{و ن و م}$ (مع حركة عقارب الساعة)

ويكون قياس الزاوية عددا سالبا (-هـ) حيث $\angle \text{ب و ا} < 0$.

وحدات قياس الزاوية

أولاً: القياس الستيني

وحدات هذا القياس هي:

الدرجة ورمزها ($^{\circ}$) الدقيقة ورمزها $'$

الثانية ورمزها $''$.

الدرجة = $60'$ ، الدقيقة = $60''$.

فمثلاً: الزاوية التي قياسها $37^{\circ} 9'$ دقيقة و $3''$

تكتب: $37^{\circ} 9' 3''$.

ثانياً: القياس الدائري: وحدة هذا القياس هي

الزاوية النصف قطرية ورمزها ($^{\circ}$) وهي الزاوية

المركزية التي تحصر قوساً طولها يساوي طول

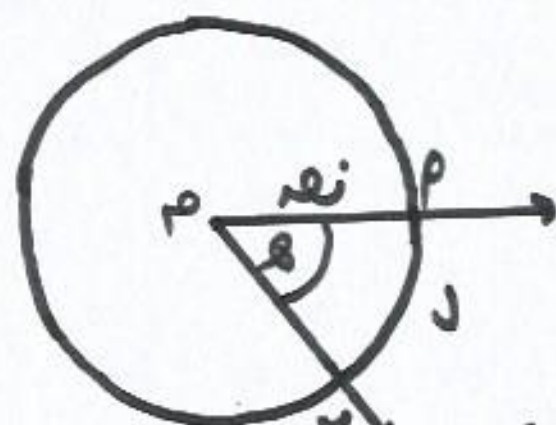
نصف قطر الدائرة وماذا كان قياس الزاوية 1° م

بالتقدير الدائري هو 1° م:

1° م = طول القوس الذي تحصره الزاوية

طول نصف قطر الدائرة.

$$\boxed{1^{\circ} \text{ م} = \frac{r}{2\pi}}$$



العلاقة بين التقدير بين الدائرة والستيني:

نعلم أنه

(47)

نعلم انه $\frac{\text{محيط الدائرة}}{\text{طول قطرها}} = \pi$

حيث $\pi \approx \frac{22}{7}$

قياس الزاوية المستقيمة $\hat{A} = \frac{\frac{1}{2} \text{ محيط الدائرة}}{\text{نقطة}}$

$$\pi = \frac{b \times \frac{1}{2} \text{ نقطة}}{b}$$

π زاوية نصف قطرية = 180°

١) التحويل القياسي من التقدير الى الارب الى التقدير الستيني:

قياس الزاوية بالتقدير الستيني = $\frac{180}{6} \times \text{هـ}$

مثال : اوجد القياس الستيني للزاوية التي قياسها

$$\frac{\pi}{3}, \frac{b}{5}$$

$$\text{الحل: } \frac{\pi}{3} = \frac{180}{6} \times \frac{b}{5} = 60^\circ \text{ هـ} \quad \frac{b}{5} = \frac{180}{6} \times \frac{\pi}{3} = 72^\circ$$

٢) التحويل القياسي من التقدير الستيني الى الارب:

اذا كان π هو قياس الزاوية بالتقدير الستيني

فانه: قياس الزاوية بالتقدير الارب = $\frac{\pi}{6} \times 180$

مثال : اوجد القياس الارب للزاوية التي قياسها $240^\circ, 90^\circ$

$$\text{الحل: } \frac{b}{4} = \frac{b}{180} \times 90 = \frac{b}{2} \quad \frac{b}{3} = \frac{b}{180} \times 240 = \frac{4b}{3}$$

الدوال المثلثية للزاوية الحادة

م Δ زاوية حادة في Δ ABC القائمة في C
والمطلوب: إيجاد الدوال الدائرية للزاوية

م Δ ب . بمعلومية أطوال أضلعه

م Δ ب د نعتبر B هي نقطة الأصل

لمحورين متعامدين حيث BC هو محور السينات .

نرسم دائرة وحدة مركزها C

وتقطع BC في $D = (1, 0)$

هنا سياتي: $\frac{1}{1} = \frac{1}{BC} = \frac{1}{AB} = \frac{1}{AC}$

طول الضلع المقابل للزاوية

طول الوتر

$\frac{1}{1} = \frac{1}{BC} = \frac{1}{AB} = \frac{1}{AC}$: $\frac{1}{BC} = \frac{1}{AB} = \frac{1}{AC}$: طول الضلع المجاور للزاوية
طول الوتر

$\frac{1}{1} = \frac{1}{BC} = \frac{1}{AB} = \frac{1}{AC}$: $\frac{1}{BC} = \frac{1}{AB} = \frac{1}{AC}$: طول الضلع المقابل للزاوية
طول الضلع المجاور للزاوية

لأي زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية

$\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \sin$	}	$\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \sin$
$\frac{\text{القاطع}}{\text{المجاور}} = \tan$		$\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \cos$
$\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \cot$		$\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \cot$

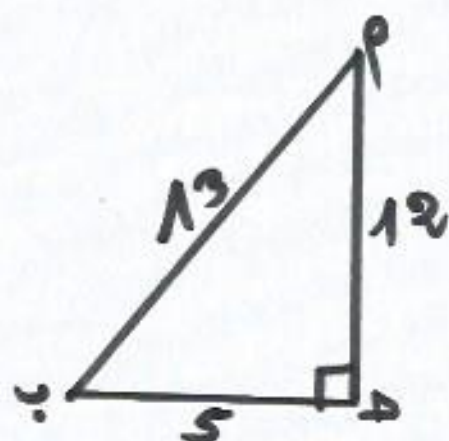
٤٩

مثال ١ : $\angle A = 90^\circ$ مثلث قائم الزاوية في H وطول $AB = 13$ كم
 $AP = 5$ سم . اوجد النسب المثلثية لكل من
 الزاويتين $\angle A$ ، $\angle B$.

الحل

$$\therefore \angle H = 90^\circ \therefore \angle A = 90^\circ \therefore \angle B = 90^\circ - \angle A = 90^\circ - 90^\circ = 0^\circ$$

$$144 = 5^2 - 13^2 =$$



$$\therefore \angle A = 90^\circ \therefore \angle B = 90^\circ - \angle A = 90^\circ - 90^\circ = 0^\circ$$

$$\therefore \angle A = 90^\circ \therefore \angle B = 90^\circ - \angle A = 90^\circ - 90^\circ = 0^\circ$$

$$\therefore \angle A = 90^\circ \therefore \angle B = 90^\circ - \angle A = 90^\circ - 90^\circ = 0^\circ$$

(1) خاصية: إذا كان ΔABC مثلثاً قائم الزاوية في $\hat{A}$ ، فإنه: $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$.

في مثال: ΔABC قائم في $\hat{A}$ بحيث: $AB = 3$ ، $AC = 4$ ، $BC = 5$.
 لنحسب $\overline{BC}^2$ ؟

بما أن المثلث ABC قائم الزاوية في $\hat{A}$ فإنه:
 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ (حسب فيثاغورس (المباشر))
 $\therefore 10 = 9 + 16 = 25 = \overline{BC}^2$

ومنه فإنه: $\overline{BC} = \sqrt{25} = 5$.

عكس النظرية:

(1) خاصية: إذا كان ΔABC مثلثاً بحيث:
 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$
 فإنه: ΔABC قائم الزاوية في $\hat{A}$.

تطبيق: ΔABC مثلث بحيث: $AB = \frac{3}{5}$ ، $AC = 1$ ، $BC = \frac{5}{4}$ ،
 لنبين أن المثلث ABC قائم الزاوية.

لدينا: $\overline{AB}^2 = 1$ ، $\overline{BC}^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$ ، $\overline{AC}^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$.
 نلاحظ أن: $1 = \frac{16}{25} + \frac{9}{25}$ أي: $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$.

وحسب مبرهنة فيثاغورس العكسية فإنه المثلث ABC قائم الزاوية في $\hat{A}$.

(51)

3 خاصية لأضلاع مثلث قائم الزاوية:

1 إذا كان مثلث قائم الزاوية فلا بد طول وتره أكبر من طول ضلعي الزاوية القائمة.

حساب المثلثات

الدوال المثلثية

الدوال المثلثية الأساسية

« دائرة الوحدة » هي دائرة تأخذنا طول نصف قطرها وحدة لقياس الأطوال، وفي الشكل المقابل دائرة وحدة مركزها نقطة الأصل (و) لنظام إحداثي متعامد.



θ زاوية في الوضع القياسي قياسها = θ

ب هي نقطة تقاطع الضلع النهائي وب مع الدائرة و بفرض أنه: $b = (s, c)$ فلا بد كل s, c يكون عدداً حقيقياً تتوقف قيمته على قيمة θ .

تعريف

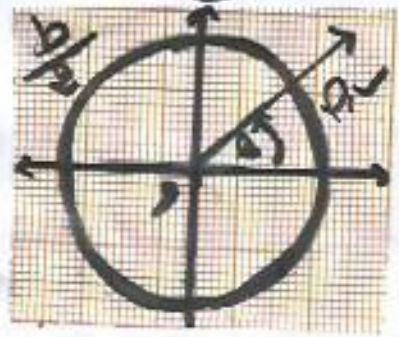
- (1) جتا θ = جيب الزاوية التي قياسها θ = c
- (2) حان θ = جيب الزاوية التي قياسها θ = s
- (3) ظل θ = ظل الزاوية التي قياسها θ = $\frac{s}{c}$

وتتوقف إشارة كل من جتا θ ، حان θ ، ظل θ على الربع الذي تقع فيه الزاوية

1 إشارة كل من

62

إشارة كل من جتا هـ ، حاه ، طاه :



في الربع الأول : $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
كل من جتا هـ ، حاه ، طاه موجب
لاحظ انه : $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

في الربع الثاني : $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$



حاه فقط هو الموجب
لاحظ انه : $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

في الربع الثالث :

$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$



طاه فقط هو الموجب
لاحظ انه : $\theta \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

في الربع الرابع :

$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$



جتاه فقط هو الموجب
لاحظ انه : $\theta \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

مثال 1 عينة الربع الذي تقع فيه الزاوية التت قياسها (هـ) اذا كانه :

- ① حاه < 0 ، جتا هـ > 0 . ② جتا هـ < 0 ، حاه > 0
- ③ حاه > 0 ، جتا هـ > 0 ④ حاه > 0 ، طاه < 0

الحل : ① الربع الثاني ② في الربع الرابع
③ في الثالث ④ أيضا في الثالث

محاولة هامة

(53)

ملحوظة هامة إذا كانت و أ ب زاوية في الوضع

القياسي، ونه ضلعا النهائي يقطع دائرة الوحدة

في $N = (س، ص)$ فإنه: $1 = س^2 + ص^2$ فيثاغورث

$$\boxed{آيه \quad حناه + حاه = 1}$$



مثال ٢: اوجد الدوال المثلثية الأساسية للزاوية التي

قياسها ه، إذا كانت الزاوية في الوضع القياسي

وضلعا النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة

$$① \left(\frac{4}{5}, ص\right) \quad ② \left(س, -\frac{3}{5}\right)$$

الحل: ١) نعيب قيمة ص:

$$1 = س^2 + ص^2 \quad \therefore 1 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + ص^2$$

$$\therefore ص^2 = \frac{16}{25} - 1 = -\frac{9}{25} \quad \therefore ص = \pm \frac{3}{5}$$

$$\therefore \text{عند ما } س = \frac{4}{5}, ص = \frac{3}{5}, \text{ فإنه حناه} = \frac{4}{5}, \text{ حاه} = \frac{3}{5}$$

$$\text{ظاه} = \frac{3}{4}, \text{ ظا} = \frac{3}{4}$$

$$\text{وعند ما } س = \frac{4}{5}, ص = -\frac{3}{5} \text{ فإنه}$$

$$\text{حناه} = \frac{4}{5}, \text{ حاه} = -\frac{3}{5}, \text{ ظاه} = \frac{3}{4}, \text{ ظا} = -\frac{3}{4}$$

$$② \quad 1 = س^2 + ص^2 \quad \therefore 1 = \left(-\frac{3}{5}\right)^2 + س^2$$

$$\therefore س^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25} \quad \therefore س = \pm \frac{\sqrt{7}}{5}$$

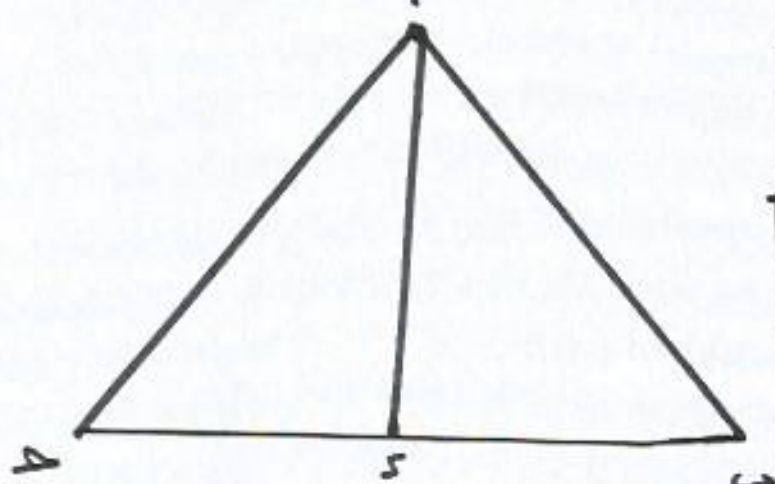
$$\text{عند ما } س = \frac{\sqrt{7}}{5}, ص = -\frac{3}{5} \text{ فإنه: حناه} = \frac{\sqrt{7}}{5}, \text{ حاه} = -\frac{3}{5}$$

$$\text{ظاه} = \frac{3}{\sqrt{7}}, \text{ ظا} = -\frac{3}{4} \quad \text{عند ما } س = -\frac{\sqrt{7}}{5}, ص = -\frac{3}{5} \text{ فإنه:}$$

$$\text{حناه} = -\frac{\sqrt{7}}{5}, \text{ حاه} = -\frac{3}{5}, \text{ ظاه} = \frac{3}{\sqrt{7}}, \text{ ظا} = \frac{3}{4}$$

مثلث رسم P و $\perp$ ح

لايجاد طول P ، $\overline{AP}$ ، $\overline{BP}$ ، $\overline{CP}$:



$$\overline{AP}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{PD}^2$$

$$\overline{BP}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{PD}^2$$

$$\overline{CP}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{PD}^2$$

مثال:

مثلث P قائم الزاوية في P

فلماذا كان $\angle P = 90^\circ$ ثم رسم شعاعا

من P الى BC ، اوجد طول AP ، BP ، CP اذا كان
 $BD = 3$ ، $CD = 7$

الحل:

$$\overline{AP}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{PD}^2 \quad \therefore \overline{AP}^2 = 3^2 + \overline{PD}^2$$

$$\overline{BP}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{PD}^2 \quad \therefore \overline{BP}^2 = 3^2 + \overline{PD}^2$$

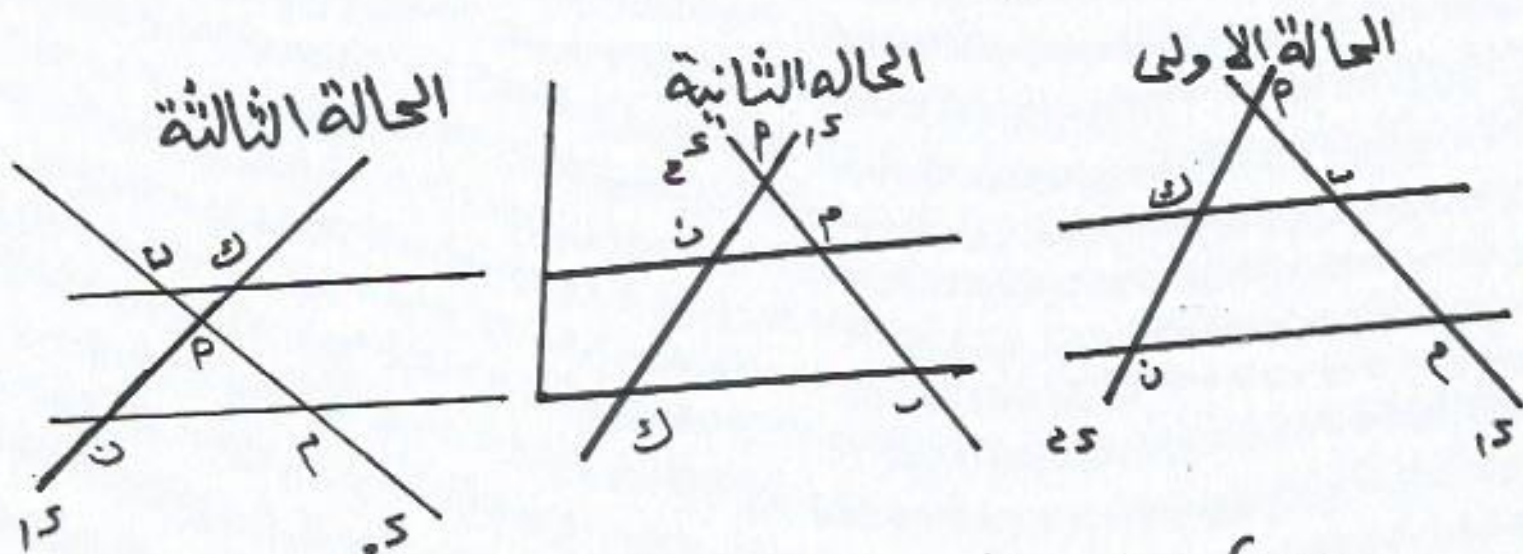
$$\overline{CP}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{PD}^2 \quad \therefore \overline{CP}^2 = 7^2 + \overline{PD}^2$$

مبرهنة طاليس:

مبرهنة طاليس المباشرة:

٢- مثال: د، مستقيمان متقاطعا في نقطة م

م، ب نقطتان من المستقيم د، مختلفتان عن م
 ن، و ك نقطتان من المستقيم د، مختلفتان عن م
 بحيث ك ب // م ن



سيكون لدينا في جميع الحالات: $\frac{MP}{PN} = \frac{MK}{KN} = \frac{MN}{NK}$

خاصية:

ليكن (د)، (د') مستقيمين متقاطعين في نقطة م
 م، ب نقطتان من المستقيم (د) مختلفتان عن م
 ن، و ك نقطتان من المستقيم (د') مختلفتان عن م
 إذا كان: (د ك // م ن) فإن: $\frac{MP}{PN} = \frac{MK}{KN} = \frac{MN}{NK}$

تمرين تطبيقي
في الشكل اسفله لدينا:

$$(دك) // (بأ) , و ب = 6 , و ٢ = ٥ , ك = ٥ = س , و ٥ = س + ٤$$

احسب س

الحل

لدينا (بأ) ، (دك) مستقيمان متقاطعان في و

بما أن: (دك) // (بأ)

$$\text{فإن: } \frac{بأ}{دك} = \frac{٢}{٥} = \frac{٥}{٥}$$

$$\text{لأنه } \frac{٥}{٥} = \frac{٢}{٥} \text{ , يعني أن: } \frac{٥}{٥} = \frac{٦}{س + ٤}$$

$$٥(س + ٤) = ٦ \times ٥ \quad \therefore ٥س + ٢٠ = ٣٠$$

$$\text{ومنه فإن: } ٥س = ٣٠ - ٢٠ = ١٠$$

$$\therefore س = ٢$$

* ملاحظات هامة:

- ١- تستعمل خاصية طاليس المباشرة لحساب الأطوال
- ٢- يمكن تطبيق خاصية طاليس المباشرة على مثلث

أو ك باعتبار (بأ) و (دك):

مستقيمان يتقاطعان في م ، ن : تنصيان

على التوالي إلى (بأ) ، (دك) ، بحيث: (دك) // (بأ)

$$\text{ومنه سيكون لدينا: } \frac{بأ}{دك} = \frac{٢}{٥} = \frac{٥}{٥}$$

١- خاصية: ليكن (س) ، (Δ) مستقيمين متقاطعين في P
 م ، ب نقطتان من المستقيم (س) تختلفان عن P
 ن ، ك نقطتان من المستقيم (Δ) تختلفان عن P
 إذا كانت النقطة P ، م ، ب والنقطة P ، ن ، ك في نفس الترتيب
 تحقق: $\frac{AP}{PK} = \frac{BP}{KN}$ فإذن: (ب ك) // (م ن)

ملاحظات هامة:

- ١- عند تطبيق خاصية طاليس العكسية انتبه إلى ترتيب النقاط
- ٢- تستعمل خاصية طاليس العكسية لبرهنة على التوازي